

Klausurbeispiele zur Fachdidaktik Geometrie für Real- und Hauptschule.

Einführung von Winkel und Winkelmaß:

(Aufgabe in der 1. Staatsprüfung G/H im Herbst 2001)

- a) Skizzieren Sie einen Weg zur einführenden Behandlung von Winkeln in Klasse 6. Welche Aspekte sind hierbei besonders wichtig? Mit welchen Aufgabenstellungen bzw. Schüleraktivitäten kann man sie berücksichtigen?
- b) Nennen Sie die wesentlichen Zielvorstellungen (Einsichten; Kenntnisse; Kompetenzen der Schüler) für diese Unterrichtseinheit.
- c) Welche Medien bzw. Modelle eignen sich? Schildern Sie deren Nutzung an sinnvollen Beispielen.

Lösung zu GH-He01-FDH5-6:

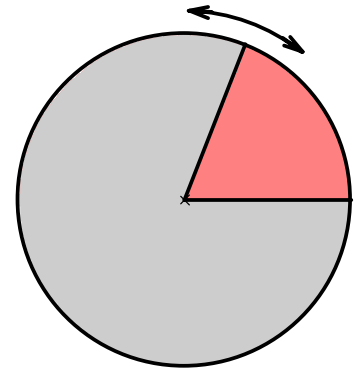
- a) Man kann von einfachen **Drehbewegungen** wie den Zeigern einer Uhr oder dem Scheibenwischer eines Autos ausgehen (Öffnen oder Schließen einer Bahnschranke, Drehung eines Bewässerungsarmes, klappbarer Meterstab etc.). Besonders vorteilhaft ist die Zeigerdrehung an der Uhr, weil bei den Zeiteinheiten wie beim Winkelmaß das Sechzigersystem eine entscheidende Rolle spielt.
 - Man wird in einem ersten Schritt Begriffe wie **Volldrehung** (großer Zeiger in 1 Stunde), **Halbdrehung** und **Vierteldrehung** betrachten und jeweils die zugehörigen Zeigerstellungen (Anfangs- und Endstand) zeichnen. Anfangs- und Endstand des Zeigers bilden jedes Mal einen *Winkel*. Die Zeigerstände sind die *Schenkel*, der Drehpunkt ist der *Scheitel* und das überstrichene Ziffernfeld das *Winkelfeld* des Winkels. Damit sind die wesentlichen Begriffe anschaulich definiert und sowohl der **dynamische Aspekt (Drehbewegung)** als auch der **statische Aspekt (Winkelfeld)** berücksichtigt.
 - Durch Vorgabe des Maßes **360° für den Vollwinkel** und gleichmäßige Einteilung kommt man zu den Winkelgrößen für den **gestreckten Winkel** (180°; Halbdrehung) und den **rechten Winkel** (90°; Vierteldrehung).
 - Im nächsten Schritt werden nun Zwischengrößen eingeführt, die „nach Aussehen“ benannt werden: **spitzer Winkel** (kleiner als ein rechter Winkel); **stumpfer Winkel** (zwischen rechtem und gestrecktem Winkel) und **überstumpfer Winkel** (zwischen gestrecktem und Vollwinkel).

Wesentlich ist die Erkenntnis *der Unabhängigkeit der Winkelgröße von der Schenkellänge* (Vergleich von Kirchturmuhren und Armbanduhr!).

Man kann gezeichnete Winkel am besten **vergleichen**, indem man einen Winkel auf Transparentpapier abpaust und diesen mit dem anderen zur Deckung zu bringen versucht. Mit diesem Hilfsmittel kann man auch Winkel **halbieren, verdoppeln, addieren, subtrahieren** etc. Wie muss man dabei jeweils vorgehen?

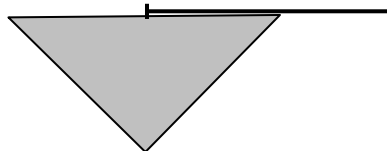
Um Schülern eine **Vorstellung von Winkelgrößen** zu vermitteln, sind Übungen an folgendem Modell geeignet:

Zwei gleichgroße Kreisscheiben aus Pappe – verschiedene Farben – werden längs eines Radius geschlitzt und ineinandergesteckt. Dann kann man durch Drehen beliebige Winkelgrößen einstellen. Durch Schätzen eingestellter Winkel und durch Einstellen vorgegebener Winkelgrößen mit anschließender Korrektur lassen sich tragende Vorstellungen (Vergleiche mit Standardrepräsentanten wie 90° , 180° , 270° , 360° aber auch 45° und 60°) über Winkelgrößen erarbeiten.

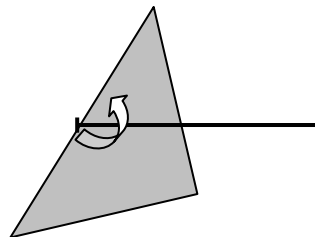


Zeichnen und Messen von Winkeln mit dem Geodreieck sollte stets in derselben Weise erfolgen, wobei die Drehbewegung real ausgeführt oder vorgestellt wird:

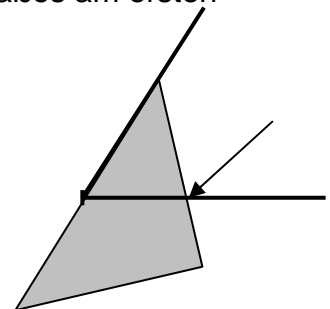
1. Anlegen an den ersten Schenkel.
2. Drehen um den Scheitel bis das gewünschte Winkelmaß auf der Skala am ersten Schenkel steht (bzw. bis Kante des Geodreiecks auf dem zweiten Schenkel liegt)
3. Zeichnen des zweiten Schenkels (bzw. Ablesen des Winkelmaßes am ersten Schenkel).



1. Geodreieck anlegen



2. Drehen



3. Ablesen bzw. Zeichnen

b) Zielvorstellungen:

- Kennen der wichtigsten Begriffe: Schenkel, Scheitel, Winkelfeld.
- Sichere Vorstellung von Winkelgrößen, insbesondere von den genannten Standardrepräsentanten.
- Verbindung des Winkelbegriffs mit einer Drehung (Winkelgröße ist Maß für Drehung, also unabhängig von Zeigerlänge).
- Sichere Kompetenz im Zeichnen und Messen von vorgegebenen Winkeln.

c) Geeignete Medien bzw. Modelle sind samt nützlichen Einsatzbeispielen bereits genannt.

Lit.-Hinweis:

Krauter S. u.a.; Mathematik 6. Ein Arbeitsbuch für die Hauptschule. Ausgabe B. Verlag Mildenerger. Offenburg 1985.

Krauter S. u.a.; Mathematik 6. Ausgabe B. Hauptschule. Lehrerband. Offenburg 1985.

Ziele, Inhalte und Arbeitsformen zur Körpergeometrie (Stereometrie) in der Realschule und Hauptschule:

Klassenstufe Inhalte	Ziele	Arbeitsformen	Typische Aufgaben.
5/6 Quader und Sonderformen. Andere Körper	Erarbeiten der geometrischen Grundformen in Ebene und Raum. Grundlegung der Größenbegriffe Länge, Flächeninhalt und Rauminhalt. Aufbau von Standardrepräsentanten für die Größen Flächeninhalt und Rauminhalt. Erarbeitung der grundlegenden Relationen zwischen Geraden und Ebenen: senkrecht zu, parallel zu.	Falten, Bauen, Messen, Basteln, Schneiden etc. Reales Experimentieren mit Gegenständen. Körpermodelle bauen: Verschiedene Modelle: Kanten-, Flächen-, Vollmodelle. Abwicklungen (Netze) herstellen und beschreiben. Formenkunde: Ecken, Kanten, Flächen und ihre Beziehungen. Einfache zeichnerische Darstellungen: verschiedene Ansichten; einfachste Schrägbilder durch Verschieben. Messvorgänge zur Fundierung der Größenbegriffe Flächeninhalt und Rauminhalt. Identifizierung zueinander paralleler Flächen und Kanten an Quadern und Quadernetzen. Benachbarte Kanten und Flächen von Quadern treffen jeweils senkrecht aufeinander.	Verschiedene Modelle bauen und beschreiben. Flächeninhalte von Rechtecken mit Messquadraten ausmessen. Bei inhaltsgleichen Rechtecken feststellen, dass sie verschiedene Umfänge haben können u.u. Flächengrößen abschätzen. Rauminhalte mit Messwürfeln ausmessen. Bei volumengleichen Quadern feststellen, dass sie verschiedene Oberflächengrößen haben können. Rauminhalte abschätzen. Die Begriffe Rauminhalt und Gewicht diskriminieren: Körper mit gleichem Volumen aber verschiedenem Gewicht u.u. betrachten. Womit misst man was? Gleichfärben von parallelen Flächen bzw. Kanten an Quadern bzw. Bildern von Quadern. Gütekriterien für gute Modelle: Rechtwinkligkeit der Kanten an den Ecken.

Klassenstufe Inhalte	Ziele	Arbeitsformen	Typische Aufgaben.
7/8 Senkrechte Säulen mit verschiedenen Grundflächen.	<p>Aufbau von Säulen als Schicht oder Schiebekörper erkennen und nutzen.</p> <p>Symmetrien erkennen.</p> <p>Erkennen der Körperabmessungen an den Netzen (Mantel, Grundfläche): Die beiden Seiten des Mantelrechtecks sind die Körperhöhe und der Umfang der Grundfläche.</p> <p>Volumen- und Oberflächengröße bestimmen.</p>	<p>Bau und Konstruktion von Netzen (Abwicklungen) und damit von Oberflächenmodellen.</p> <p>Aufbau aus Schichten oder Stapeln zum Erkennen des Schichtenprinzips ($\text{Rauminhalt} = G \cdot h$).</p> <p>Schiebemodelle (Grund- und Deckfläche mit Fäden verbunden). Schrägbilder in Frontschau und Vogelschau.</p>	<p>Berechnen (jetzt an Stelle von Ausmessen) der Körperoberfläche an Hand der Abwicklungen (Mantelfläche + Grundfläche + Deckfläche).</p> <p>Typisches Beispiel: Aus einem Blatt DIN-A4 kann man auf zwei Weisen einen Zylinder formen. Berechne für beide Fälle die Grund- und die Deckfläche.</p> <p>Berechnen (jetzt an Stelle von Ausmessen) des Rauminhalts und zwar entsprechend dem Schichtenaufbau.</p> <p>Funktionale Veränderungen Betrachten: Wie verändern sich z.B. Mantelfläche, Grundfläche, Oberfläche, Rauminhalt eines Zylinders, wenn man den Grundkreisradius bzw. die Höhe verdreifacht?</p>

Klassenstufe Inhalte	Ziele	Arbeitsformen	Typische Aufgaben.
9/10 Pyramiden, Kegel, Kugeln. [Stümpfe]	<p>Aufbau der Körper erkennen:</p> <p>Grundfläche, Seitenflächen (Mantel).</p> <p>Unterschiede und Gemeinsamkeiten mit zugehörigen Säulen.</p> <p>Oberflächen- und Inhaltsbestimmung.</p> <p>Symmetrien der Körper.</p>	<p>Modelle bauen (Spitzkörper). Zusammenhang von Mantelfläche (Dreiecke bzw. Kreissektoren) und Grundfläche erkennen.</p> <p>Körper in Ansichten und Schrägbildern zeichnen.</p> <p>Volumenvergleiche durchführen: Umfüllversuche, Schätzungen, Wiegen etc.</p> <p>Rauminhalte und Oberflächen bestimmen.</p>	<p>Zeichnen, Konstruieren, Messen, Berechnen.</p> <p>Oberflächen und Rauminhalte berechnen.</p> <p>Netze erstellen. Schnitte herauszeichnen und rechtwinklige Dreiecke erkennen und berechnen (Pythagoras).</p> <p>Symmetrien vorführen: Drehmodelle; Schnitte; Höhenlinien, Falllinien, kürzeste Wege auf den Körperoberflächen.</p> <p>Das Gradnetz der Erde (Breitenkreis und Meridiane erkunden).</p> <p>Modelle basteln, mit denen z.B. Drehsymmetrie verdeutlicht werden kann (z.B. Schaschlikstab mit angeklebtem Achsenquerschnitt).</p>

Klausur am Freitag 23. April 2004

Bitte füllen Sie die persönlichen Angaben auf diesem Blatt in Druckschrift aus und geben Sie das Blatt in Ihrem Doppelbogen mit ab.

Persönliche Angaben:

Name	Vorname	Matr.-Nr.	Sem. im WS03/04

Klausurergebnis:

5 min	5 min	10 min	5 min	5 min	15 min
a) 8	b) 6	c) 6	d) 8	e) 8	f) 8
Klausurpunkte:		Übungspunkte:		Gesamt:	

Zugelassene Hilfsmittel:

- Ein nicht programmierbarer Taschenrechner.
- Schreib- und Zeichenwerkzeug.
- 1 namentlich gekennzeichnetes Blatt DIN-A4 mit eigenen Notizen.

Die Lösungen sind sauber und vollständig auf kariertem Doppelbogen DIN A 4 mit üblichem Kopf und Rand darzustellen. Die Form wird mit bewertet.

Konstruktionen sind sauber und genau mit dünnem Bleistiftstrich auszuführen. Alle Lösungen sind knapp, aber hinreichend zu begründen.

Arbeitszeit: 45 Minuten.

Die durch Abgabebblätter erworbenen Punkte werden anteilig angerechnet.

Die Klausur ist bestanden, falls insgesamt mindestens 40 Punkte erworben werden.

Eine Klausur mit weniger als 24 Punkten kann nicht gewertet werden.

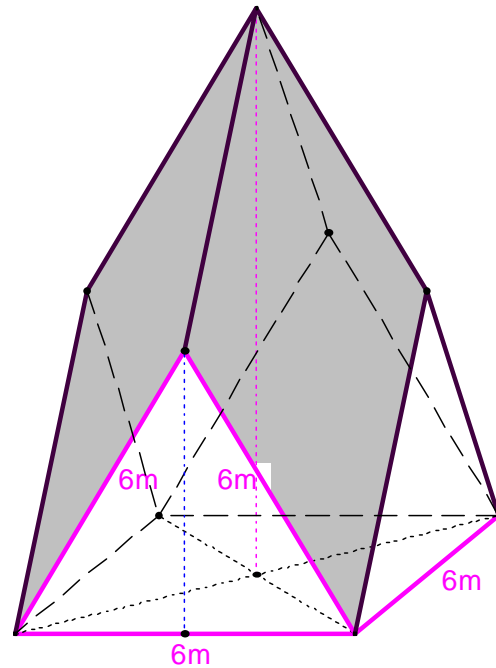
Aufgabe:

Gegeben ist eine **Turmhaube** mit einem Quadrat der Seitenlänge $s = 2 \cdot a$ als Grundfläche.

Die vier Giebelflächen sind gleichseitige Dreiecke und die vier Dachflächen sind Rauten.

Wählen Sie für die Zeichnung die Grundseite $s = 2 \cdot a = 6 \text{ m}$.

Bei jeder der folgenden Teilaufgaben ist nicht nur diese Aufgabe zu lösen, sondern auch zu benennen, welche **didaktischen Intentionen** (Wissensinhalte, Kompetenzen etc.) mit der Aufgabe verbunden sind und welche Schwierigkeiten zu überwinden sind.

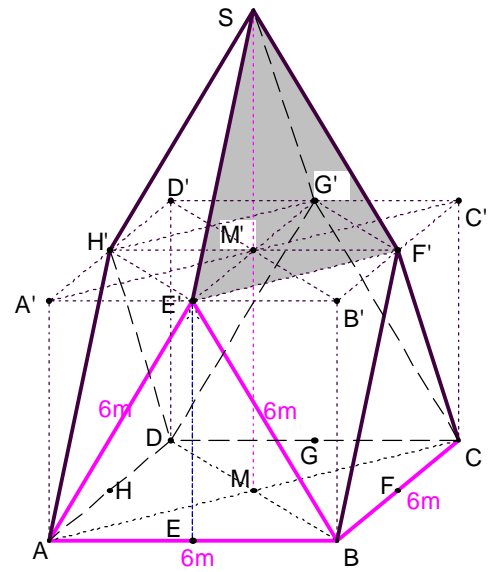


- Skizzieren Sie ein **Schrägbild** der Haube aus freier Hand und beschreiben Sie die Formelemente des Körpers.
- Skizzieren Sie ein **Netz (Abwicklung)** des Körpers aus freier Hand.
- Zeichnen Sie die Haube im Maßstab 1:100 im **Grund- und Aufriss** in zugeordneter Lage.
- Ermitteln Sie die **Höhe der Giebelflächen** sowie die **Körperhöhe** der gesamten Haube.
- Berechnen Sie die Größe der **Dachfläche**.
- Berechnen Sie den **Rauminhalt** der Haube.
Hinweis: Bei geschicktem Vorgehen können Sie sich viel Rechenarbeit ersparen.

Lösungen zur Klausur FD-Geometrie am 23. April 2004:

a) Erzeugung der **Schrägbildskizze** im Aufriss (Frontschau):

- Giebeldreieck ABE' in wahrer Größe (warum?).
- BC und AD parallel schräg nach hinten verkürzt.
- Giebeldreieck CDG' in wahrer Größe (warum?).
- Giebelhöhen FF' und HH' parallel zu EE' in wahrer Größe.
- Parallelschnitt auf Höhe E': E'F'G'H' mit M'.
- Dreieck H'F'S in wahrer Größe (warum?)
- Restkanten sichtbar ausgezogen und unsichtbar gestrichelt ergänzen.



Man erkennt den Körperaufbau besonders gut, wenn man das Grundquadrat auf der Höhe der Giebelspitzen nochmals einzeichnet.

Formelemente:

- Die Haube ist ein **Vielflächner (Polygon)**.
- Sie hat **9 Ecken**. An den 4 Ecken der Grundfläche und an der Spitze S treffen je 4 Kanten, an den vier Giebelspitzen jeweils nur 3 Kanten aufeinander.
- Sie hat **16 Kanten**, die auf Grund der Vorgabe (gleichseitige Giebeldreiecke und Rautendachflächen) alle gleich lang sind.
- Sie hat **9 Flächen**, das Grundquadrat, die vier gleichseitigen Giebeldreiecke und die vier Dachrauten.
- Der Eulersche Polyedersatz ist erfüllt: $E - K + F = 9 - 16 + 9 = 2$.

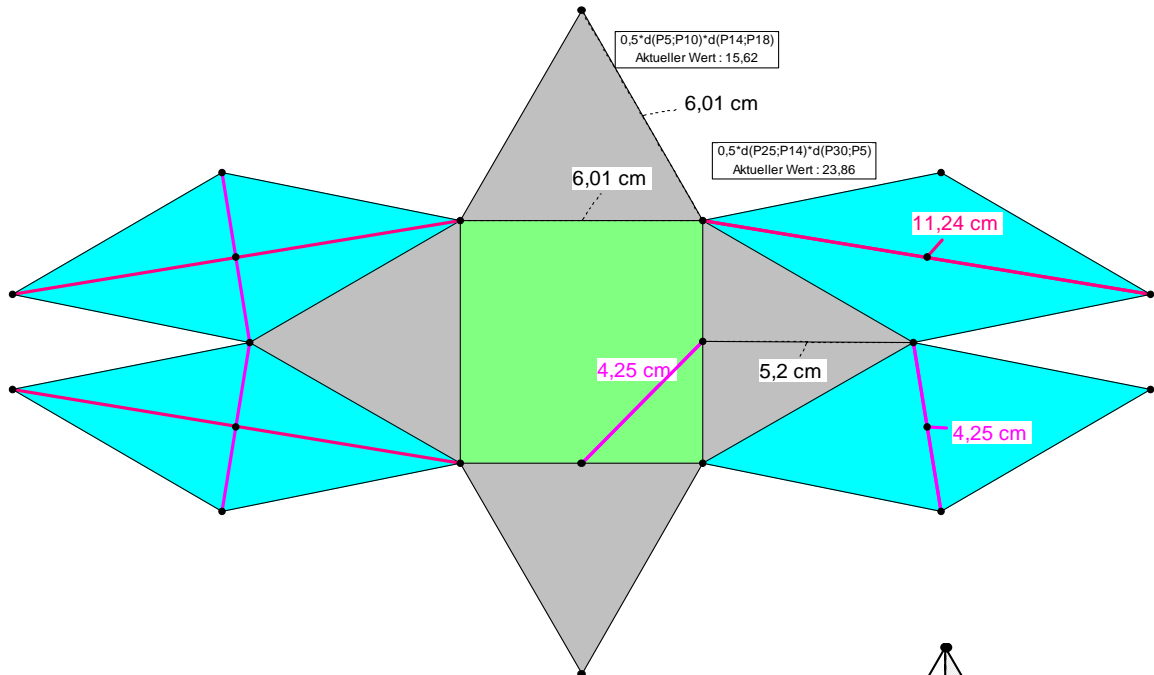
Didaktische Intentionen:

- Aufbau und Zusammenhang der Kanten und Ecken: Ersatz für Kantenmodell.
- Art, Anzahl und Zusammenhang der Formelemente erkennen.

Schwierigkeiten:

- Freihandzeichnen nicht gewohnt und nie gelernt!
- Mangelndes Wissen über Schrägbilder (Gesetze der Parallelprojektion).
- Auffinden der Giebelspitzen. Hilfe: Bau des Kantenmodells.
- Erkennen der Rautenflächen als eben ohne Knickkante (z.B. entlang E'F').

b) An der Grundfläche hängen vier gleichseitige Dreiecke (Giebelquadrate) und an diesen die vier Rauten. Die Rauten bestehen nicht aus zwei gleichseitigen Dreiecken, vielmehr ist die kleinere Diagonale die Strecke E'F', also die halbe Diagonale des Grundquadrats (Mittelparallele zu A'C' im Dreieck A'B'C').



Didaktische Intentionen:

- Aufbau und Zusammenhang der Seitenflächen des Polyeders erkennen: Ersatz für Flächenmodell
- Vorbereitung der Flächenberechnung

Schwierigkeiten:

- Ermittlung der Rautenform
- Zusammenhang der verschiedenen Teilflächen

c) **Zweitafelprojektion** (Grund- und Aufriss bzw. Draufsicht und Vorderansicht) mit M 1:100.

Didaktische Intentionen:

- Genaues und sauberes Zeichnen
- Ausbildung der räumlichen Vorstellung für die beiden Ansichten von oben bzw. von vorne.

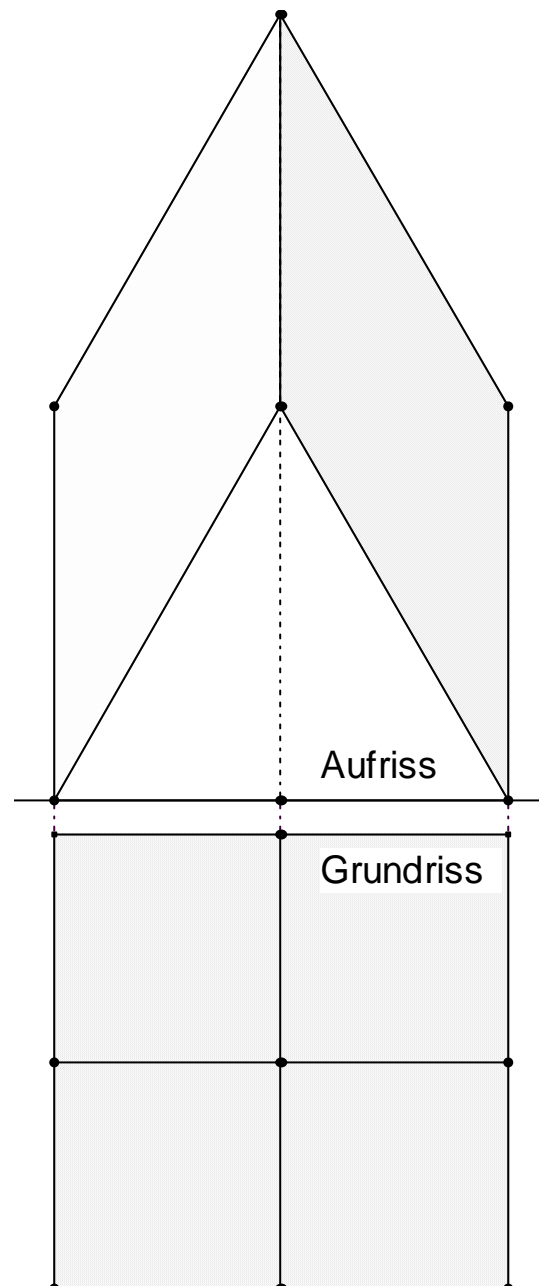
Schwierigkeiten:

- Ermittlung der Gesamthöhe des Körpers
- Ungewöhnliche Ansichten

d) Die Giebelhöhe $h_1 = EE'$ ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck ABE' mit der Seite $2 \cdot a = 6 \text{ m}$, hat also den Wert

$$h_1 = a \cdot \sqrt{3} = 5,196 \text{ m} \approx 5,2 \text{ m}.$$

Das Dreieck $E'G'S$ bzw. $H'F'S$ ist nach



Voraussetzung (Dachflächen sind Rauten) ebenfalls gleichseitig mit der Seitenlänge $2a$, also ist

$$\mathbf{M'S = M'M = h_1 = a * \sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \mathbf{MS = h = 2 * h_1 = 2 * a * \sqrt{3} = 10,4 \text{ m.}}$$

Es gibt noch andere Möglichkeiten für die Argumentation, dass $h = 2 * h_1$ ist.

Didaktische Intentionen und gleichzeitig Schwierigkeiten:

- Erkennen von gleichseitigen und rechtwinkligen Dreiecken und Ausnutzen deren geometrischer Besonderheiten: Berechnungen mit Pythagoras
- Erkennen des Aufbaus des oberen Teils der Haube zur Berechnung der gesamten Körperhöhe.
- Erkennen von Schnitten wie z.B. $H'F'S$ als gleichseitiges Dreieck.

- e) Zunächst ist festzustellen, dass nur die Rauten Dachflächen sind, denn alle Giebelflächen sind Fronten.

Den Flächeninhalt einer Raute kann man berechnen mit Hilfe seiner Diagonalen e und f , nämlich $A = 0,5 * e * f$ (jede Raute ist auch ein symmetrischer Drachen!).

Eine Diagonale ist $\mathbf{e = E'F' = EF = \frac{1}{2} * AC = \frac{1}{2} * 2 * a * \sqrt{2} = a * \sqrt{2} = 4,24 \text{ m.}}$

Die andere Diagonale ist BS . Diese ermittelt man z.B. aus dem bei M rechtwinkligen Dreieck BMS nach dem Satz von Pythagoras:

$$\mathbf{BS^2 = f^2 = MS^2 + BM^2 = h^2 + 2 * a^2 = 14 * a^2} \quad \text{also} \quad \mathbf{BS = a * \sqrt{14} = 11,225...m.}$$

Damit erhält man die ganze eine Raute $A_1 = 0,5 * e * f = 23,811 \text{ m}^2$.

Die gesamte **Dachfläche** ergibt:

$$\mathbf{4 * A = 2 * e * f = 2 * a * \sqrt{2} * a * \sqrt{14} = 4 * a^2 * \sqrt{7} = 10,58 * a^2 = 95,247 \text{ m}^2.}$$

Hat man die Länge der Diagonale $f = BS$ der Raute berechnet, bietet sich eine ganz einfache Berechnungsmöglichkeit für die Größe der Dachfläche an: Da alle Dachflächen gleich gegen die Grundfläche geneigt sind und zwar genau in dem Winkel, in dem BS gegen BM geneigt ist, gibt das Verhältnis von $BS : BM$ das Verhältnis der Dachfläche zur Grundfläche an. Man erhält daher

$$\text{Dachfläche } D = \frac{BS}{BM} * 36 \text{ m}^2 = \frac{a * \sqrt{14}}{a * \sqrt{2}} * 36 \text{ m}^2 = \sqrt{7} * 36 \text{ m}^2 = 95,247 \text{ m}^2.$$

Didaktische Intentionen und Schwierigkeiten::

- Erkennen der Rautendiagonalen: Mittelparallele zu $A'C'$ im Dreieck $A'B'C'$ bzw. Hypotenuse im Dreieck BMS .
- Bestimmung von Flächeninhalten von Rauten bzw. deren Zerlegung in zwei gleichschenklige Dreiecke.
- Schwierigkeiten: Erkennen der entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke.

- f) Ein Versuch, das Volumen der Haube abzuschätzen, führt auf eine sehr außerordentlich hilfreiche Idee: Man könnte das Volumen abschätzen durch einen

Quader mit der Grundfläche ABCD und der Höhe EE'. Die oben überstehende Pyramide könnte ungefähr die zum Quader fehlenden Eckteile ausfüllen:

Quadervolumen = $36 \text{ m}^2 \cdot h_1 = 108 \cdot \sqrt{3} \text{ m}^3 = 187,061 \text{ m}^3$. Genauere Betrachtung dieser Idee zeigt, dass die in vier Teile zerlegte obere Pyramide sogar exakt in die zum Quader fehlenden Eckteile passt, also das Volumen exakt ist:

Die obere Hälfte der Haube besteht aus vier kongruenten Pyramiden der Art M'E'F'S. Klappt man die letztgenannte um die Achse E'F' nach unten, so füllt sie genau den zum Quader mit Grundfläche ABCD und Höhe MM' fehlenden Teil E'F'B'B aus. Dies gilt an allen vier Ecken gleichermaßen. Daher haben wir als Rauminhalt der Haube $V = (2 \cdot a)^2 \cdot a \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot a^3 \cdot \sqrt{3} = 6,928 \cdot a^3 = 187,061 \dots \text{m}^3$.

Noch eine weitere Möglichkeit bietet sich an:

Man verlängert die Kanten SE', SF', SG' und SH' bis zur Grundebene und ergänzt den Körper mit vier Pyramiden an den Giebelseiten zu einer großen Pyramide. Von dieser zieht man die leicht zu berechnenden vier kleinen Pyramiden ab.

Didaktische Intentionen:

- Erkennen der Zerlegungs- und Umformungsmöglichkeit des Körpers zur einfachen Bestimmung des Volumens.

Schwierigkeit:

- Kein Routinekörper mit Standardform vorhanden, für den es eine fertige Volumenformel gibt. Selbst wenn man die Pyramide im oberen Teil abtrennt, bleibt kein bekannter Standardkörper (nicht einmal ein Pyramidenstumpf!), der formelmäßig berechenbar wäre.
- Erkennen von Teilkörpern. Geschicktes Zerlegen in Teilkörper und vorteilhaftes Zusammensetzen dieser zu einfacheren.

Mögliches Vorgehen im Unterricht:

Schritt 1: Bau eines Kantenmodells (Konstruktion vor Analyse!):

- Aufbau einer Vorstellung vom Körper. Ecken-, Kanten- und Flächenzahl.
- Alle Kanten sind gleich lang. Erkenntnisse über die begrenzenden Flächenstücke.
- Erkennen von gleichseitigen, gleichschenkligen bzw. rechtwinkligen Dreiecken an der Oberfläche bzw. bei Schnitten durch den Körper.
- Auftreten von Diagonalen in Quadraten bzw. Höhen in gleichseitigen Dreiecken.

Schritt 2: Skizzieren eines Kantengerüsts (Schrägbildskizze). Ziele wie bei a).

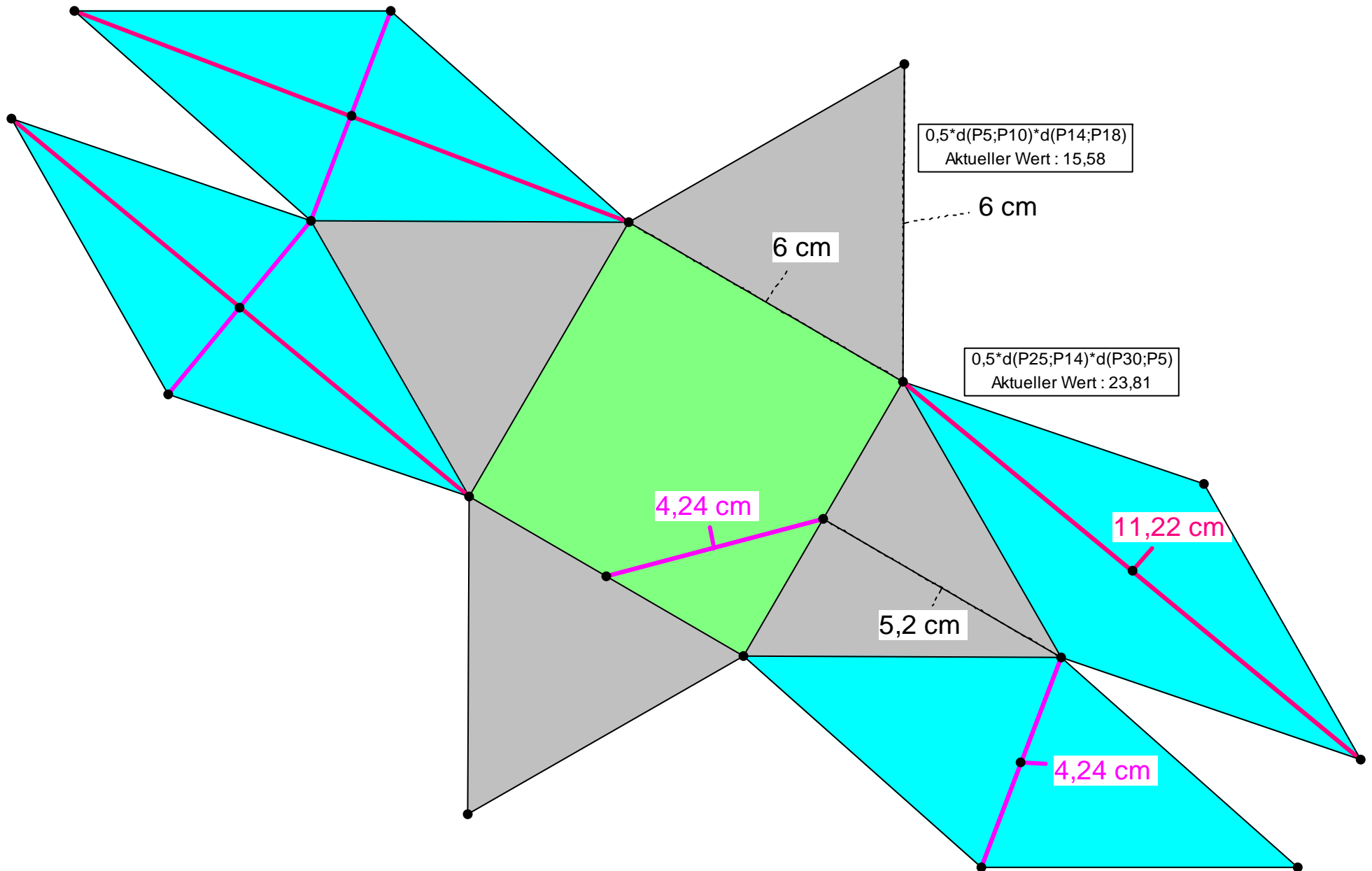
Schritt 3: Konstruieren und Ausschneiden eines Netzes (Abwicklung).

Schritt 4: Konstruktion der Ansichten von oben (Draufsicht oder Grundriss) bzw. von vorne (Vorderansicht oder Aufriss). Dabei Ausnutzen der Modelle.

Schritt 5: Abschätzung des Volumens:

Aufbau aus Teilen. Vergleich mit bekannten Umkörpern: quadratische Säule, Pyramide. Erkennen geschickter Zerlegungen bzw. Umformungen.

Schritt 6: Berechnungen mit konkreten Zahlenwerten und mit Variablen.



Aufgaben zum Staatsexamen: Fachdidaktik Geometrie R und H

Fachdidaktik 9/10. Lehramt R im SS 1993.

Aufgabe 1:

- Formulieren Sie die Aussage des Sinussatzes. Geben Sie zwei verschiedene Formulierungsvarianten an. Vergleichen Sie Vor- und Nachteile der Varianten.
- Nennen Sie Anknüpfungspunkte bzw. Fragestellungen, die Zugänge zur unterrichtlichen Behandlung des Sinussatzes ermöglichen.
- Schildern Sie eine Möglichkeit unterrichtlichen Vorgehens zur Einführung des Sinussatzes. Skizzieren Sie die wesentlichen Stufen mit den zugeordneten Zielen. Geben Sie die fachlichen, didaktischen und methodischen Überlegungen für Ihr Vorgehen an.
- Geben Sie eine "Musterlösung" (vorbildlicher Tafelanschrieb oder Hefteintrag) für folgende Aufgabe:

Von einer geraden Straße aus wird von zwei Punkten im Abstand von 100 m ein Turm angepeilt. Man sieht den Turm zunächst unter 60° dann unter 75° Abweichung gegenüber der geraden Fahrtrichtung. Ermitteln Sie durch Rechnung den Abstand des Turmes von der Straße.

Aufgabe 2

Ein senkrechter Kegelstumpf ist bestimmt durch die Radien R und r der Grund- bzw. Deckfläche sowie die Höhe h .

- Entwickeln Sie eine Formel zur Berechnung des Stumpfvolumens unter Verwendung der Rauminhaltsformel $V = 1/3 * (G*h)$ für Kegel.
- Kontrollergebnis: $V = 1/3 * p * h * (R^2 + R*r + r^2)$.
- Berechnen Sie die Länge der Mantellinie in Abhängigkeit von R , r und h .
- Zur Annäherung des Stumpfvolumens lassen sich zwei Wege beschreiten:
 V_1 : Mittelwert zwischen ein- und umbeschriebenem Zylinder
 V_2 : Volumen des Zylinders über dem Mittenquerschnitt (Querschnitt auf halber Höhe) des Stumpfes.

Berechnen Sie V_1 und V_2 in Abhängigkeit von R , r und h .

Untersuchen Sie, wie sich die beiden Näherungsformeln in den beiden Grenzfällen eines Kegelstumpfes verhalten:

(d1): Zylinder

(d2): Kegel

Welche Näherung ist Ihrer Meinung nach vermutlich genauer? Begründung!

- e) Berechnen Sie sowohl für V_1 als auch für V_2 die Abweichung vom exakten Wert V gemäß a). Vergleichen Sie die beiden Abweichungen. Ordnen Sie die drei Werte V , V_1 und V_2 der Größe nach.
- f) Die Ergebnisse von e) lassen eine exakte Berechnung von V mit Hilfe von V_1 und V_2 zu. Geben Sie diese Volumenformel an. Kontrollergebnis: $V = \frac{1}{3} \cdot (V_1 + 2 \cdot V_2)$.
- g) Im Lehrplan spielt die Behandlung von Stümpfen zu recht eine sehr untergeordnete Rolle. Begründen Sie, warum die Befassung mit der in a) bis g) aufgegriffenen Thematik dennoch eine gute Empfehlung für die Arbeit in der Schule darstellt.

Fachdidaktik 5/6 Geometrie 1994

- a) Geben Sie die wesentlichen formalen und inhaltlichen Zielsetzungen der Geometrischen Propädeutik an.
- b) Nennen Sie die Begriffe, die im Zusammenhang mit Punkten, Strecken und Geraden erarbeitet werden sollen. Schildern Sie für drei ausgewählte Problemstellen die spezifischen Schwierigkeiten. Geben Sie jeweils ein Beispiel an.
- c) Zwischen Punkten und Geraden tritt der Abstandbegriff in drei Formen auf.
 (1) Geben Sie diese Formen an und beschreiben Sie Schüleraktivitäten dazu.
 (2) Eine Form weist besondere Schwierigkeiten auf? Geben Sie diese Schwierigkeiten an. Welche Abhilfen sind möglich?
- d) Was versteht man unter "selbstkontrollierenden Figuren"? Welche Bedeutung haben Sie im Unterricht? Geben Sie aus den Bereichen
 (1) Figuren mit senkrechten und parallelen Geraden bzw.
 (2) Figuren mit Kreisen
 jeweils ein Beispiel an und erläutern Sie seinen Einsatz im Unterricht.

FD 7/8: Geometrie Frühjahr 1995.

- a) Ab Klasse 7 soll der propädeutische Geometrieunterricht in einen mehr systematischen Geometrieunterricht übergehen. Erläutern Sie diese Aussage und nennen Sie fünf übergreifende Lernziele.
- b) Die Grundkonstruktionen "Mittelsenkrechte einer Strecke" und "Winkelhalbierende" können mit dem Geodreieck oder mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden. Schildern Sie Vor- und Nachteile dieser beiden Methoden bei der Erarbeitung und Durchführung. Geben Sie didaktische Gründe an, die für oder gegen den Einsatz dieser Methoden sprechen.
- c) Formulieren Sie den Satz über die Winkelhalbierenden in einem Dreieck. Geben Sie hinführende Problemstellungen an. Schildern Sie einen schülergerechten Beweis.

- d) Formulieren Sie die Problemstellung aus c) für Vierecke. Welche Probleme treten auf? Für welche Viereckstypen ist eine Aussage leicht möglich? Geben Sie Möglichkeiten an, wie man auch die anderen Viereckstypen untersuchen kann.

Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck. FD 7/8. Frühjahr 1996

- a) Formulieren Sie den Satz von Pythagoras, den Kathetensatz und den Höhensatz als Flächensätze und in algebraischer Form. Welche Aufgabentypen können mit diesen Sätzen gelöst werden? Geben Sie jeweils ein Beispiel und bewerten Sie die Aufgabentypen didaktisch.
- b) Leiten Sie aus dem Satz von Pythagoras den Höhensatz her.
- c) Skizzieren Sie zwei unterschiedliche Einstiegswege zu der in a) genannten Satzgruppe. Geben Sie jeweils die benötigten Vorkenntnisse der Schüler an.
- d) Schildern Sie eine typische Sachaufgabe zum Satz von Pythagoras. Welche Schwierigkeiten können auftreten? Wie kann man ihnen vorbeugen?
- e) Geben Sie jeweils ein geeignetes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Pythagoras bei der Berechnung von Körpern und in der Trigonometrie.

Fachdidaktik 9/10 Ähnlichkeitslehre Herbst 1996

- a) Für einen Einstieg in die Ähnlichkeitslehre bieten sich an
- ein abbildungsgeometrischer Zugang,
 - eine Betrachtung von Streckenverhältnissen,
 - ein Zugang über Figurenvergleiche.

Beschreiben Sie jeden dieser Zugänge an einem geeigneten Beispiel und geben Sie eine kurze didaktische Bewertung.

- b) Formulieren Sie die beiden Strahlensätze an Hand einer Zeichnung und diskutieren Sie jeweils ihre Umkehrbarkeit.
- c) Welche Rolle spielen die Strahlensätze in einem abbildungsgeometrischen Aufbau der Ähnlichkeitslehre? Welche Vorteile bietet ihr Einsatz? Geben Sie ein Beispiel an.
- d) Ein kegelförmiger Messbecher fasst bis zum Eichstrich 1 Liter. Er wird bis zur Hälfte seiner Höhe (bezogen auf den Eichstrich) mit Wasser gefüllt.
- Berechnen Sie, wie viel Wasser im Messbecher ist.
 - Lässt man den Anteil des Wassers am Gesamtvolumen des Messbechers schätzen, so werden häufig falsche Werte angegeben. Wie kann man den Sachverhalt plausibel machen?
 - Zeigen Sie an einem Beispiel, welcher Zusammenhang zwischen den Rauminhalten von zwei ähnlichen Körpern (Maßstabsfaktor k) besteht.

Aufgabe: Geometrie**Frühjahr 2000; FD 5-6**

- a) Welche Lernziele verfolgt der Geometrieunterricht in Klasse 5 und 6?
- b) Welche geometrischen Kenntnisse sollen die Schüler dabei erwerben?
- c) Erklären Sie eine didaktisch sinnvolle Stufenfolge bei der Einführung von Flächeninhalt und Rauminhalt

Fachdidaktik 5/6: Geometrie**Frühjahr 2001 – FD 5/6**

- a) Erläutern Sie den Begriff „Geometrische Propädeutik“. Welche formalen und inhaltlichen Zielsetzungen werden dabei verfolgt?
- b) Für Strecken und Geraden sollen die Relationen „... ist senkrecht zu ...“ und „... ist parallel zu ...“ behandelt werden.
- c) Geben Sie die Eigenschaften dieser Relationen in formaler Schreibweise an.
- d) Beschreiben Sie, wie diese Relationen im Unterricht erarbeitet werden können.
- e) Bei der Behandlung von Würfel und Quader können drei Typen von Modellen eingesetzt werden. Geben Sie die drei Typen an und schildern Sie für jeden Typ, welche Eigenschaften des Körpers er besonders deutlich veranschaulicht.
- f) (1) Geben Sie an, was man unter einem Würfelnetz versteht.
 (2) Die 11 Würfelnetze kann man in drei Klassen einteilen, je nachdem wie viele Quadrate maximal in einer Reihe liegen. Zeichnen Sie für jede Klasse einen Vertreter.
 (3) Erläutern Sie, wie man Würfelnetze zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens einsetzen kann.

FD 9-10-**Herbst 2001:****Der Kreis im Unterricht**

1. Bei der Behandlung des Kreises müssen dessen Flächeninhalt und sein Umfang thematisiert werden. In welcher Reihenfolge tun Sie dies? Begründen Sie Ihre Vorgehensweise!
2. Skizzieren Sie jeweils einen möglichen Unterrichtsgang zur Erarbeitung des Flächeninhalts und des Umfangs des Kreises.
3. Als Formeln für den Kreisumfang sind $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ und $u = \pi \cdot d$ gebräuchlich. Welche Version ist bei Anwendungen bzw. in der Mathematik besser geeignet? Begründen Sie ihre Meinung!
4. a) Beschreiben Sie die Möglichkeit zur π -Bestimmung anhand eines Zufallexperiments (sogenannte Monte-Carlo-Methode).
 b) Erläutern Sie eine weitere schulgemäße Methode zur Bestimmung von π .

Lösung:

1. Meistens zuerst der Kreisumfang, da dieser für Handlungen leichter zugänglich ist als die Fläche: Rad abrollen, Schnur um Zylinder legen, ...

Bei der Erarbeitung der Flächeninhaltsformel kann auf die Umfangsformel zurückgegriffen werden: Kuchenstückchen-Methode. Durch Vergleich mit Quadraten, Sechseck usw. kann der Flächeninhalt des Kreises nur eingegrenzt werden.

2. *Kreisumfang*: Messen von Durchmesser und Umfang bei runden Gegenständen; tabellarische Darstellung der Messwerte und des Quotienten u/d ; Proportionalität von d und u herausarbeiten; Proportionalitätsfaktor π ist etwas größer als 3; Verwendung des TR.

Kreisfläche: Abschätzung mit um- und einbeschriebenem Quadrat liefert: $A \sim 3r^2$.

Ein genaues Resultat liefert das Zerschneiden des Kreises in "Kuchenstücke" und

deren Anordnung zu einem angenäherten Rechteck. $A = \frac{u}{2} * r$.

3. Bei runden Gegenständen lässt sich der Durchmesser leichter messen als der Radius, deshalb ist hier d besser geeignet. Für Berechnungen in der Mathematik oder Physik ist meist der Radius eine geeignete Bezugsgröße. Deshalb wird hier $2\pi r$ verwendet.
4. a) Quadrat mit enthaltenem Viertelkreis, Reißnägel darauf fallen lassen und auszählen. Verhältnis der Reißnägel im Viertelkreis zur Anzahl im Quadrat ergibt $\frac{1}{4} * \pi$.
b) Pi-Bestimmung durch einbeschriebene und umbeschriebene regelmäßige Vielecke; ausgehend vom 6-Eck wird die Eckenzahl verdoppelt; die Länge der neuen Seite kann nach Pythagoras berechnet werden; Einsatz des TR

Trigonometrie im Unterricht

1. Beschreiben Sie zwei mögliche Unterrichtseinstiege zum Thema Trigonometrie und bewerten Sie diese Einstiege.
2. Skizzieren Sie einen möglichen Unterrichtsgang zur Erarbeitung der Sinus-Funktion für Winkel von 0° bis 90° .
3. a) Geben Sie für die Kosinus-Funktion und die Tangens-Funktion die wesentlichen Unterschiede zur Sinus-Funktion an.
b) Wodurch unterscheiden sich die Winkelfunktionen von den seither bekannten Funktionen?
4. Erläutern Sie, wie die folgende Tabelle ohne Taschenrechner mit Hilfe eines gleichseitigen Dreiecks ausgefüllt werden kann.

$\tan \alpha$	0°	30°	60°	90°
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				

Lösung:

1. Steigungsdreieck, Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck, ähnliche rechtwinklige Dreiecke; Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis
2. Vergleich der Seitenverhältnisse von rechtwinkligen Dreiecken; bei gleichem α hat das Verhältnis von a/c immer denselben Wert.

Variation des Winkels bei fester Hypotenuse c ; wenn a größer wird, wird auch a/c größer. Jedem Winkel α kann ein Quotient a/c zugeordnet werden \Rightarrow Funktion!

Für einen Winkel α wird der zugehörige Quotient a/c Sinus von α genannt.

Mit Hilfe eines Viertelkreises eine Tabelle der Sinusfunktion für $\alpha = 0^\circ, 10^\circ, \dots, 90^\circ$ erstellen und das Schaubild zeichnen. Das Schaubild mit $y = x$ vergleichen; Funktionswerte zu Winkeln und Winkel zu Funktionswerten ablesen.

Jetzt erst Einsatz der sin-Taste des TR

3. a) Die Kosinusfunktion beginnt für 0° bei 1 und ist bis 90° monoton fallend bis ; sie entsteht aus der Sinusfunktion durch Spiegelung an $x = 45^\circ$; sie hat also im wesentlichen denselben Charakter wie die Sinusfunktion.

Die Tangensfunktion startet bei 0° wie die Sinusfunktion, steigt dann aber immer steiler an und ist für 90° nicht definiert. Deshalb ist es ungünstig, mit der Tangensfunktion zu beginnen, obwohl sie bei Steigungen in der Umwelt verwendet wird.

b) Keine linearen und keine quadratischen Funktionen, sondern zyklische oder periodische Funktionen.

Die Sinus- und die Kosinusfunktion haben nur Funktionswerte von -1 bis +1.

4. Für 0° und 90° ergeben sich die Funktionswerte als Grenzwerte aus der jeweiligen Definition. Für 30° und 90° errechnet man die Werte aus einem „halben“ gleichseitigen Dreieck mit den Seiten $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Fachdidaktik 9/10 Umfang, Flächeninhalt und Rauminhalt

- a) Bei der Behandlung des Kreises kann man mit dem Flächeninhalt oder dem Umfang beginnen. Schildern Sie das Vorgehen bei beiden Möglichkeiten und nennen Sie Vor- und Nachteile.
Erläutern Sie dabei, welcher Zusammenhang zwischen dem Umfang und dem Flächeninhalt eines Kreises besteht.
- b) Lassen sich die Überlegungen bei Umfang und Flächeninhalt des Kreises auf die Behandlung von Oberfläche und Volumen der Kugel übertragen?
Zeigen Sie Übereinstimmungen und Unterschiede auf.
- c) Formulieren Sie den Satz von Cavalieri. Zeichnen Sie eine Skizze.
- d) Schildern Sie, wie der Satz von Cavalieri zur Herleitung der Formel für das Volumen einer Kugel eingesetzt werden kann.

FD R 7-8; Geometrie.**Herbst 1997.**

- a) Welchen Wert hat die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck ($n \geq 3$)? Formulieren Sie einen Satz und geben Sie einen Beweis an. Gilt der Satz auch für n-Ecke mit einspringenden Ecken (nicht-konvexe n-Ecke)?
- b) Schildern Sie drei verschiedene Zugänge zur Winkelsumme im Dreieck im Unterricht. Bewerten Sie diese Zugänge nach heuristischen Gesichtspunkten und erläutern Sie, ob und gegebenenfalls wie daraus ein Beweis entwickelt werden kann.
- c) Übertragen Sie das Viereck ABCD auf kariertes Papier. Konstruieren Sie mit diesem Viereck eine Parkettierung der Ebene. Begründen Sie anhand ihrer Zeichnung, dass man die Ebene mit jedem Viereck parkettieren kann.
- d) Geben Sie zwei Möglichkeiten an, wie Schüler den Satz über die Winkelsumme im Viereck begründen können. Welche Vorkenntnisse werden dabei verwendet?

Fachdidaktik R 7/8: Geometrie Herbst 1999

- a) Nennen Sie jeweils drei inhaltliche, formale und übergreifende Lernziele, die im Geometrieunterricht ab Klasse 7 verfolgt werden sollen.
- b) (1) Formulieren Sie den Satz von Thales als „Wenn ..., dann“-Satz und seinen Umkehrsatz.
(2) Beweisen Sie einen der beiden Sätze. Geben Sie genau an, welche Hilfssätze Sie verwenden.
(3) Schildern Sie zwei unterrichtliche Zugänge zu Satz von Thales. Geben Sie an, ob der Zugang zum Satz oder zu seiner Umkehrung führt.
(4) Der Satz von Thales ist ein Sonderfall eines allgemeineren Satzes. Formulieren Sie diesen Satz und erläutern Sie ihn an einer Skizze.
- c) Schildern Sie, wo der Satz von Thales
 - (1) bei Dreieckskonstruktionen,
 - (2) beim Thema Kreis und Gerade
 benötigt wird. Geben Sie jeweils ein Beispiel.

Fachdidaktik R 9/10**Figur fehlt**

- a) Ermitteln Sie überschlägig den Umfang und den Flächeninhalt der schraffierten Figur. Begründen Sie Ihre Überlegungen kurz im einzelnen.
- b) Berechnen Sie Umfang und Inhalt der schraffierten Figur. Vergleichen Sie mit Ihrem Überschlag aus a).
- c) Laut Lehrplan sollen in Klasse 9 Umfang und

Flächeninhalt des Kreises sowie die Kreiszahl π behandelt werden.

Schildern Sie einen schulgemäßen Weg zur Behandlung des Umfangs **oder** des Flächeninhalts in mehreren Stufen.

Geben Sie charakteristische Ziele und Aktivitäten (exemplarische Aufgabenstellungen) für jede Stufe an.

- d) Beschreiben Sie ein für Klasse 9 geeignetes Verfahren zur näherungsweise numerischen Berechnung der Kreiszahl π .

Fachdidaktik R 9/10

Figur fehlt

- a) Lösen Sie folgende Konstruktionsaufgabe.
Die Konstruktionsschritte sind kurz zu begründen:
*Gegeben: Die Geraden g und h sowie der Punkt P .
Gesucht: Kreis durch P , mit g und h als Kreistangenten.*
- b) Eine "zentrische Streckung aus Z " sei definiert als "Dilatation mit Fixpunkt Z ".
Leiten Sie daraus möglichst viele Eigenschaften einer zentrischen Streckung her (z.B. Existenz eines Zentrums, Fixgeraden, Fixpunkte, Spurgeraden).
- c) Nennen Sie mindestens
zwei Ähnlichkeitssätze für Dreiecke
einen Ähnlichkeitssatz für rechtwinklige Dreiecke
zwei Ähnlichkeitssätze für Rechtecke
einen Ähnlichkeitssatz für Kreise
- d) Eine Pyramide wird "auf halber Höhe" parallel zur Grundfläche abgeschnitten.
Wie verhalten sich Kantenlängen, Grundflächen, Oberflächen und Rauminhalte der Ausgangspyramide und der "abgeschnittenen Spitze"?
- e) Auf welcher Höhe muss man schneiden, damit
(1) die Oberfläche (2) der Rauminhalt
der abgeschnittenen Spitze gerade halb so groß ist wie bei der Ausgangspyramide?

Fachdidaktik Hauptschule - Grundkurs Geometrie

Frühjahr 2002

In Klasse 8 und 9 der Hauptschule wird im Geometrieunterricht das Thema „Spitzkörper“, das sind Pyramiden und Kegel, behandelt.

- a) Schildern Sie die wesentlichen (formalen und materialen) Ziele für diese Unterrichtseinheit.
- b) Nennen Sie die wichtigsten Aktivitäten (z.B. Tätigkeiten oder typische Aufgabenbeispiele) zur Erreichung dieser Ziele.

- c) Skizzieren Sie einen Unterrichtsgang zur Erarbeitung der Volumenbestimmung für Spitzkörper. Beschreiben Sie jeweils auch die benötigten Vorkenntnisse.
- d) Auf welcher Höhe, gemessen von der Spitze S aus, muss man einen Kegel parallel zu seiner Grundfläche abschneiden, damit die abgeschnittene Spitze
- α) genau das halbe Volumen
 - β) genau die halbe Oberflächengröße
- wie der Ausgangskegel hat? Begründen Sie Ihre Antworten.

Abbildungen in der Hauptschule

FD-Geo- H Frühjahr 2003

1. In Klasse 5 und 6 ist eine *propädeutische Behandlung der Kongruenzabbildungen* Verschiebung, Drehung und Achsenspiegelung vorgesehen.
Welche experimentellen Zugänge für die **Achsenspiegelung** bieten sich dafür an? Skizzieren Sie mögliche Techniken und bewerten Sie diese durch Angabe von Vor- und Nachteilen.
2. Wozu kann man Achsenspiegelungen im Mathematikunterricht der Schule verwenden?
Geben Sie jeweils ein geeignetes Beispiel für drei typische Anwendungssituationen an.
3. In einem Schulbuch findet sich folgende Aufgabe:
Konstruiere ein symmetrisches Trapez aus $a = 8 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$ und $\alpha = 75^\circ$.
Erstellen Sie einen mustergültigen Heftaufschrieb („erwünschte ideale Musterlösung“) eines Schülers zur Bearbeitung dieser Aufgabe.
4. Formulieren Sie die beiden wichtigsten Anwendungssituationen für die Kongruenzsätze für Dreiecke. Geben Sie für jeden Fall ein Beispiel an. Geben Sie den Kongruenzsatz **SWW** in je einer für diese Situationen passenden Formulierung an.

Lösungsvorschlag:

Der Lösungsvorschlag orientiert sich an einem den Studierenden zur Verfügung stehenden Skript zum Thema Kongruenzabbildungen in der Fachdidaktik Geometrie.

1.

Auszug aus dem erwähnten Skript:

1.1 Hantierungstechniken: Spiegeln, Durchstechen, Durchdrücken etc.

1. Verwendung eines Spiegels: Man kann weder abbilden noch auf Symmetrie überprüfen. Allenfalls als Einstieg tauglich für grobe erste Vorstellung.

2. Halbdurchlässige Glasplatte: Deutliche Verbesserung: abbilden und prüfen möglich.

3. Falten und Klecksen bzw. Durchstechen: nur unkontrolliert möglich, keine Geraden, Kreise, Winkel etc. abbildbar.

4. Falten und Durchpausen mit Transparentpapier (Bilder in anderer Farbe als Urbilder). Sehr gute Methode, die fast keine Nachteile hat. Sehr empfehlenswert. Sollte immer wieder verwendet werden.

5. Kohlepapiermethode: Durchdrücken mit Kohlepapier. Hervorragende Technik mit vielen überraschenden Vorteilen und Weiterführungen (s. Anlage). Vorteile der Kohlepapiermethode: Realer Abbildungsvorgang vorhanden; Original (Bleistift) und Bild (Kohlepapier) sind sauber getrennt; Abb.-egsch. Sind sehr anschaulich und konkret zu begründen: Geraden-, Längen-, Winkel-, Parallelentreue; technische Einfachheit (Materialaufwand gering); keine Beschränkung auf nur eine Halbebene; Verkettung von Spiegelungen ist gut zu modellieren.

Exp. Zugang	Vorteile	Nachteile
Verwendung eines Spiegels	Entspricht dem Namen der Abbildung. Erste grobe Orientierung über Lage und Aussehen des Bildes	Man kann weder eine gegebene Figur mit Hilfe des Spiegels abbilden noch eine auf Symmetrie überprüfen
Halbdurchlässige Glasplatte	Man kann gleichzeitig Bild und Urbild in den Blick nehmen. Sowohl Abbilden als auch Überprüfen auf Symmetrie ist möglich.	Technisch anspruchsvoll für genaue geometrische Zeichnungen. Glasdicke problematisch. Relativ ungenau.
Falten und Klecksen bzw. Falten und schneiden.	Einfach. Kindern bekannt. Beim Schneiden sind schöne symmetrische Muster herstellbar.	Rolle von Urbild und Bild unklar. Nur unregelmäßige und unkontrollierte Figuren abbildbar. Prüfung auf Symmetrie nicht möglich.
Falten und Durchstechen	Einfach handhabbar.	Nur für einzelne Punkte realisierbar. Kreise z.B. können so nicht abgebildet werden.
Falten und Durchpausen mit Transparentpapier	Rolle von Bild und Urbild klar trennbar (Farbgebung). Sowohl Prüfung auf Symmetrie als auch Abbildung machbar. Keine Beschränkung auf eine Halbebene. Abbildungseigenschaften können exp. Erarbeitet werden.	Keine erkennbaren Nachteile.
Falten und Durchdrücken mit Kohlepapier	Alle Vorteile wie bei Transparentpapier.	

	Hervorragend fortsetzbar auf Verkettung von Abbildungen.	
--	--	--

2.

Auszug aus dem erwähnten Skript:

4.1 **Achsensymmetrische Grundformen. Grundkonstruktionen**

Als Fundament (Basis zum Begründen, Quasiaxiomensystem) sollten die Schüler einige wenige achsensymmetrische Grundfiguren kennen: Kreise. Damit gilt es nun, andere Figuren zu erzeugen:

Man spiegle einen Kreis mit einem Peripheriepunkt A an einer Durchmessergerade als Achse. Die entstehende Figur ist Grundlage für die drei wichtigsten Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal:

- a) Mittelsenkrechte einer Strecke. Streckenhalbierung.
- b) Winkelhalbierende eines Winkels.
- c) Senkrechte zu einer Geraden durch einen Punkt.

Diese drei Grundkonstruktionen können nun angewendet werden an Vielecken, insbesondere an Dreiecken und speziellen Vierecken: Umkreismitte, Inkreismitte, Höhenschnittpunkt etc. als Entdeckungen. Man bewerkstellige die drei Grundkonstruktionen an Dreiecken auch durch Falten (worauf kommt es jedesmal wesentlich an?).

In ganz analoger Weise gewinnt man die beiden Zweikreisfiguren mit gleichgroßen bzw. verschiedengroßen Radien. Die erste besitzt zwei, die zweite dagegen nur eine Symmetrieachse.. Man erhält viele Konstruktionsmöglichkeiten und Figureigenschaften (Raute, Drachen etc.).

4.2 **Erzeugen von Figuren durch Achsenspiegelung**

Interessanter als das Abbilden fertiger Figuren durch Achsenspiegelung oder andere K-abbildungen ist das Erzeugen von Figuren durch Achsenspiegelung. Im Prinzip treten zwei Fälle auf:

1. Fall:

Gegeben ist eine beliebige Figur F und eine beliebige Achse a. F wird an a gespiegelt nach $a(F) = F^* = G$. Dann ist sowohl die Figur $H = F \cap G$ als auch die Figur $J = F \cup G$ achsensymmetrisch zur Achse a.

2. Fall:

F, G beide symmetrisch zur Achse a. Dann ist sowohl $F \cap G$, als auch $F \cup G$ achsensymmetrisch zu a.

Gemäß dem Fall 1 erzeugt man alle Typen achsensymmetrischer Drei- und Vierecke konstruktiv und gewinnt ihre wesentlichen Eigenschaften aus der Symmetrie.

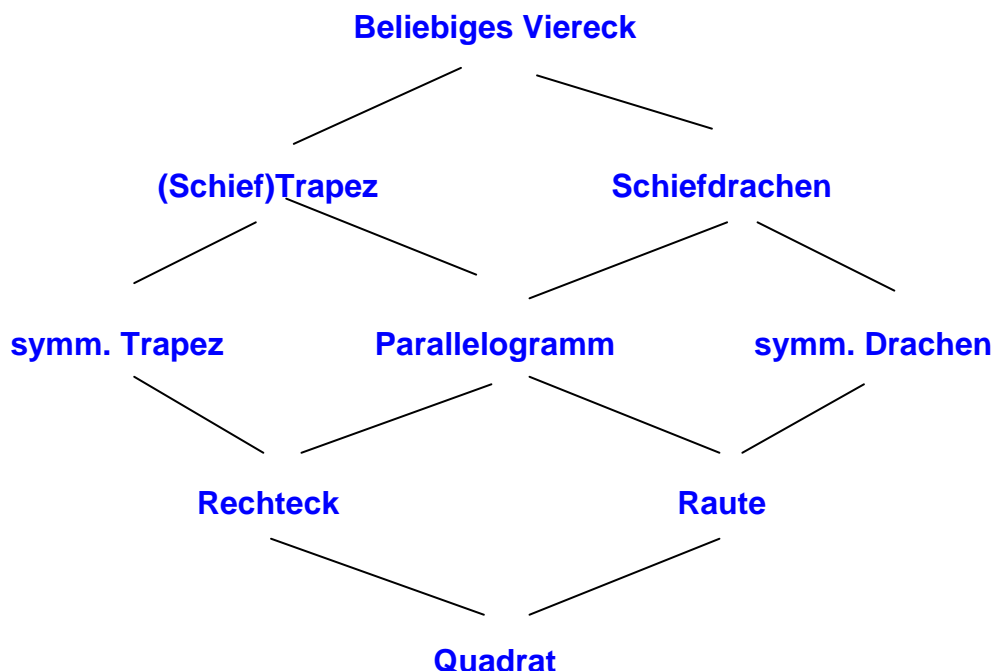
4.3 **Symmetrie als Beweisprinzip**

Als Beispiel werde der Winkelhalbierendensatz im Dreieck genannt: Die Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

4.4 **Problemlösen mit Hilfe von Achsenspiegelungen** (z.B. Indianeraufgaben)

4.5 Symmetriehierarchien bei Drei- und Vierecken

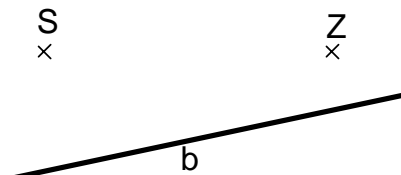
Durchgehendes Ordnungsprinzip sind die Symmetrien der Figuren. Hassediagramm (\subseteq):



Auf jeder Stufe nimmt die Zahl der Bestimmungsstücke von 1 beim Quadrat bis zu 5 beim allgemeinen Viereck um 1 zu. Die zugehörigen Symmetriegruppen sind die D_4 beim Quadrat, die D_2 bei Rechteck und Raute, je eine Z_2 auf der nächsten Stufe. Schieftrapez und Schiefdrachen besitzen nur noch Schrägsymmetrie (je eine Schrägspiegelachse).

Die wichtigsten Typen von Anwendungen sind:

- Die üblichen **Grundkonstruktionen** (Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Streckenhalbierung) werden durch Achsensymmetrie (in der Regel mit der Zweikreisfigur mit gleichgroßen Kreisen) begründet.
- **Erzeugen symmetrischer Figuren durch Abbilden.**
Beispiel: Ein Dreieck wird an einer seiner Seitengeraden gespiegelt. Es entsteht ein symmetrischer Drachen.
- **Achsensymmetrie als Beweishilfsmittel:**
Beispiel: Die folgende Konstruktionsaufgabe. Weil das Trapez symmetrisch ist, muss $\alpha = \beta$ sein und die Achse des Trapezes ist Mittelsenkrechte der Seiten a und c.
- **Problemlösung bei Konstruktionsaufgaben:**
Beispiel: Wie verläuft der kürzeste Weg des Indianers von seinem Standort S zu seinem Zelt Z, wenn er auch noch kurz am Bach b Wasser



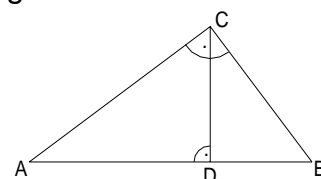
trinken möchte?

Man spiegelt S oder Z an b und erhält SZ' bzw. S'Z als kürzeste Verbindung.

- **Symmetrie als Typisierungsmerkmal von Figuren.**
Beispiel: Haus der symmetrischen Dreiecke bzw. Haus der symmetrischen Vierecke.

Fachdidaktik 9/10 – Geometrie R- Frj-2003- APO

- Beschreiben Sie für die Einführung ähnlicher Figuren
 - den euklidischen Zugang,
 - den abbildungsgeometrischen Zugang.
Nennen Sie jeweils Vor- und Nachteile und geben Sie jeweils an, wie ähnliche Figuren definiert sind.
- Nennen Sie die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke.
Geben Sie jeweils entsprechende Kongruenzsätze an.
 - Welche Bedeutung haben diese Ähnlichkeitssätze für Dreiecke?
- In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ($\gamma = 90^\circ$) ist die Höhe \overline{CD} eingezeichnet.
Schildern und begründen Sie, welche Sätze am rechtwinkligen Dreieck mit dieser Figur gewonnen werden können.
 - Bewerten Sie diesen Zugang zu den Flächensätzen am rechtwinkligen Dreieck.



Fachdidaktik Geometrie: Rauminhalte in der Realschule - Frj-2003-NPO

- Im MU der Klassen 5 und 6 wird der Größenbereich der **Rauminhalte** behandelt und Rauminhalte von einfachen *quaderförmigen Körpern* bestimmt.
 - Welche wesentlichen Lernziele werden dabei angestrebt?
 - Welche wesentlichen Aktivitätsformen im Unterricht kommen vor?
- Beschreiben Sie Möglichkeiten zur Erarbeitung des Volumens einer **Kugel** im MU der Realschule.
- Leiten Sie die Formel zur Berechnung des Kugelvolumens exakt her.
Geben Sie dabei die nötigen Voraussetzungen und die verwendeten Hilfsmittel an.

Fachdidaktik R 7/8: Geometrie

- Welchen Wert hat die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck ($n \geq 3$)?
- Formulieren Sie einen Satz und geben Sie einen Beweis an. Gilt der Satz auch für n-Ecke mit einspringenden Ecken (nicht-konvexe n-Ecke)?

- c) Schildern Sie drei verschiedene Zugänge zur Winkelsumme im Dreieck im Unterricht. Bewerten Sie diese Zugänge nach heuristischen Gesichtspunkten und erläutern Sie, ob und gegebenenfalls wie daraus ein Beweis entwickelt werden kann.
- d) Übertragen Sie das Viereck ABCD auf kariertes Papier. Konstruieren Sie mit diesem Viereck eine Parkettierung der Ebene. Begründen Sie anhand ihrer Zeichnung, dass man die Ebene mit jedem Viereck parkettieren kann.
- e) Geben Sie zwei Möglichkeiten an, wie Schüler den Satz über die Winkelsumme im Viereck begründen können. Welche Vorkenntnisse werden dabei verwendet?

Fachdidaktik R 7/8: Geometrie

- a) Nennen Sie jeweils drei inhaltliche, formale und übergreifende Lernziele, die im Geometrieunterricht ab Klasse 7 verfolgt werden sollen.
- b) (1) Formulieren Sie den Satz von Thales als „Wenn ..., dann ...“-Satz und seinen Umkehrsatz.
 (2) Beweisen Sie einen der beiden Sätze. Geben Sie genau an, welche Hilfssätze Sie verwenden.
 (3) Schildern Sie zwei unterrichtliche Zugänge zu Satz von Thales. Geben Sie an, ob der Zugang zum Satz oder zu seiner Umkehrung führt.
 (4) Der Satz von Thales ist ein Sonderfall eines allgemeineren Satzes. Formulieren Sie diesen Satz und erläutern Sie ihn an einer Skizze.
- c) Schildern Sie, wo der Satz von Thales
 (1) bei Dreieckskonstruktionen,
 (2) beim Thema Kreis und Gerade
 benötigt wird. Geben Sie jeweils ein Beispiel.

Fachdidaktik R9/10 nach WS 95/96

Aufgabe: Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

- a) Formulieren Sie den Satz von Pythagoras, den Kathetensatz und den Höhensatz als Flächensätze und in algebraischer Form. Welche Aufgabentypen können mit diesen Sätzen gelöst werden? Geben Sie jeweils ein Beispiel und bewerten Sie die Aufgabentypen didaktisch.
- b) Leiten Sie aus dem Satz von Pythagoras den Höhensatz her.
- c) Skizzieren Sie zwei unterschiedliche Einstiegswege zu der in a) genannten Satzgruppe. Geben Sie jeweils die benötigten Vorkenntnisse der Schüler an.
- d) Schildern Sie eine typische Sachaufgabe zum Satz von Pythagoras. Welche Schwierigkeiten können auftreten? Wie kann man ihnen vorbeugen?
- e) Geben Sie jeweils ein geeignetes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Pythagoras bei der Berechnung von Körpern und in der Trigonometrie.

FD-H-5-6-He01 (Entwurf Mai 01).**Flächen- und Rauminhalte**

- a) Beschreiben Sie ausführlich die methodischen Stufen bei der Erarbeitung des Flächeninhalts von Rechtecken bis hin zur Formel.
- b) Skizzieren Sie daran anschließend kurz das Vorgehen bei der Behandlung des Rauminhalts am Beispiel des Quaders.
- c) Wie kann man, ausgehend von der Flächenformel des Rechtecks die Formeln für Dreiecke und Trapeze herleiten. Beschreiben Sie jeweils 2 für die Hauptschule geeignete Wege.

Propädeutischer Geometrieunterricht

- a) Zeigen Sie kurz die historische Dimension des propädeutischen Geometrieunterrichts in seinem Wandel vom traditionellen zum historischen Geometrieunterricht auf.
- b) Beschreiben Sie wesentliche Ziele des propädeutischen Geometrieunterrichts und nennen Sie dessen zeitlichen Ort (Klassenstufe/n) im Mathematikunterricht der Hauptschule.
- c) Nennen Sie mögliche zeitgemäße Formen des propädeutischen Geometrieunterrichts.

Fachdidaktik R 7/8: Geometrie

- a) Ab Klasse 7 soll der propädeutische Geometrieunterricht in einen mehr systematischen Geometrieunterricht übergehen. Erläutern Sie diese Aussage und nennen Sie fünf übergreifende Lernziele.
- b) Die Grundkonstruktionen "Mittelsenkrechte einer Strecke" und "Winkelhalbierende" können mit dem Geodreieck oder mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden. Schildern Sie Vor- und Nachteile dieser beiden Methoden bei der Erarbeitung und Durchführung. Geben Sie didaktische Gründe an, die für oder gegen den Einsatz dieser Methoden sprechen.
- c) Formulieren Sie den Satz über die Winkelhalbierenden in einem Dreieck. Geben Sie hinführende Problemstellungen an. Schildern Sie einen schülergerechten Beweis.
- d) Formulieren Sie die Problemstellung aus c) für Vierecke. Welche Probleme treten auf? Für welche Viereckstypen ist eine Aussage leicht möglich? Geben Sie Möglichkeiten an, wie man auch die anderen Viereckstypen untersuchen kann.