

Zur Behandlung der Flächeninhalte in den Klassen 5 bis 10.

1. Flächeninhalte in Klasse 5

Aufgabe des MU in Klasse 5 ist die **Einführung des Größenbegriffs Flächeninhalt** am Beispiel einfacher Rechtecksflächen (siehe besonderes Skript „Größen“) und der *Aufbau geeigneter Größenvorstellungen* bei den Schülern.

Wie bei anderen Größenbereichen auch, sind **Messprozesse** die beste Methode, den Schülern einen Begriff von der betreffenden Größe zu vermitteln und sicher zu verankern. Bereits an dieser Stelle tritt eine Problematik zu Tage, die – nach meiner Meinung – den Flächeninhaltsbegriff zum schwierigsten Größenbegriff für die Schüler macht: Im täglichen Leben werden Flächeninhalte so gut wie niemals direkt gemessen, sondern fast immer aus gemessenen Längen berechnet! Nicht zuletzt deshalb verwechseln Schüler oft Längen mit Flächeninhalten. Ich nenne vier Gründe, die nach meiner Ansicht bei den Schülern die **Schwierigkeiten mit dem Begriff Flächeninhalt** verursachen (siehe dazu: S. Krauter u.a.; Mathematik 5, Ausgabe B mit zugehörigem Lehrerband).

Grund 1: Fehlender Messprozess.

Schüler haben vermutlich niemals Flächenstücke direkt gemessen. Sie kennen nicht einmal ein geeignetes Messgerät dafür – meistens wird auch von Erwachsenen das Metermaß als Messgerät angegeben. **Wer Schülern den Flächeninhaltsbegriff tragfähig vermitteln will, muss ihnen Messgeräte an die Hand geben, mit denen sie einfache Flächengrößen direkt ausmessen müssen.** Außerordentlich brauchbare Flächenmessgeräte sind Rasterfolien mit dm-Quadraten, cm-Quadraten, Heftkaros und mm-Quadraten. Man kann durch direktes Darüberlegen des Messgerätes die Flächengröße abzählend ermitteln. Es bedarf keiner Formel, die Schüler kommen von selbst auf die Idee, die Quadrate in Reihen zusammenzufassen und mit der Anzahl der Reihen zu multiplizieren. Das, was ich mit diesem Messgerät messe, das ist der Flächeninhalt – etwa im Unterschied zum Umfang, für den man ein Längenmaß benötigt.

Grund 2: Fehlende Vorerfahrungen aus dem Alltag

Während Schüler der Klasse 5 in der Regel mit Längenmaßen und auch Rauminhalten aus dem täglichen Leben in vielfacher Weise vertraut sind (wo haben Schüler mit Längenmaßen zu tun, wo mit Rauminhalten?), haben sie so gut wie gar keine Erfahrungen mit Flächengrößen – es sei denn sie kommen aus der Landwirtschaft. So gut wie nie haben Kinder jemals wirklich Flächengrößen gemessen oder sie im täglichen Leben benötigt. Welche Kinder kennen Zimmer- und Wohnungsgrößen, welche die Flächengröße eines Bauplatzes, eines Sportplatzes, ja nicht einmal die Flächengröße eines DIN-A4-Blattes Papier ist ihnen geläufig – ist sie Ihnen geläufig? Ganz anders etwa bei Rauminhalten: 1 Liter Milch, ein kleines Spezi (0,2 Liter), ein großes Spezi (0,4 Liter), 1 Flasche Sprudel (0,5 Liter), 1 Eimer Wasser (ca. 10 Liter) sind den Schülern durchaus vertraut. Um so wichtiger ist es, dass im MU ein **geeignetes System von Standardrepräsentanten** bereitgestellt und im Sinne nachhaltigen Lernens verankert wird. Nur im Besitz eines solchen Systems sind Schüler in der Lage, sinnvolle

Schätzungen abzugeben, denn Schätzen heißt „Vergleichen mit Bekanntem“ – und womit soll man vergleichen, wenn man nichts kennt?

Grund 3: Linienfiguren statt Flächenfiguren.

Wir präsentieren unseren Schülern ebene Figuren in der Regel nicht als *Flächenstücke* sondern als Linienfiguren. Dreiecke, Vierecke, Vielecke und Kreise oder deren Teile werden i.d.R. nur durch ihre *Randlinien* dargestellt, gerade so, als gehöre das Innere nicht dazu. So ist es nicht verwunderlich, dass Schüler, die Kreise stets nur als Linien mit dem Zirkel gezeichnet haben, nicht auf die Idee kommen, dass Kreise eine Flächengröße haben könnten, sondern nur die Länge dieser Linie angeben. Es muss deshalb bewusst gemacht werden, dass auch das Innere zum Kreis (Kreisscheibe oder Kreisfläche), auch das Innere zum Rechteck (Rechtecksfläche), auch das Innere zum Dreieck (Dreiecksfläche) gehört, kurz: **wir sollten Schülern ebene Flächenfiguren auch flächig präsentieren und nicht nur als Linienfiguren.** Ich empfehle deshalb, solche Figuren immer durch farbiges Anlegen oder Schraffieren in den Blick zu nehmen. Wenn es um Flächenfiguren geht, dann zeichnen wir auch solche und nicht nur Linienfiguren.

Grund 4: Fehlende terminologische Unterscheidung zwischen Figur und Größe

Geläufig sind sicher folgende Sprechweisen: „Die Strecke AB hat die Länge 7 cm“ oder „die Strecke AB ist 7 cm lang.“ Man unterscheidet also prinzipiell – wenn auch nicht immer bewusst und konsequent – den Repräsentanten einer Größe, die betreffende *Strecke* AB als geometrische Figur oder Punktmenge, von ihrem Größenmaß *Länge*. Eine *Strecke* (geometrische Figur) hat eine bestimmte *Länge* (Maßeigenschaft). Niemand wird etwa sagen „die Strecke beträgt 5 cm“, er sagt zumindest „die Streckenlänge beträgt 5 cm“.

Ganz analoge Unterscheidungen macht man im Bereich der *Körper* und ihrer *Rauminhalte*: „Die Kugel hat ein Volumen von 5 dm³“, „der Würfel hat einen Rauminhalt von 4 l“ etc. Ein bestimmter *Körper* (geometrische Figur) hat einen bestimmten *Rauminhalt* (Maßeigenschaft). Niemand wird sagen: „Die Kugel beträgt 5 dm³“.

Ganz anders dagegen im Falle der Flächenfiguren. Bei diesen benutzen wir den Begriff der **Fläche** sowohl für die geometrische *Figur* (Flächenstück, Rechtecksfläche, Kreisfläche) als auch für die betreffende *Größe* Flächeninhalt. Man sagt ohne Weiteres: „Der Kreis hat eine Fläche von 10 m²“, „die Dreiecksfläche beträgt 17 cm²“, etc. Kein Mensch würde die korrekte Sprechweise benutzen: „Die Kreisfläche (Figur) hat einen Flächeninhalt (Maßeigenschaft) von 10 m²“ oder „der Flächeninhalt der Dreiecksfläche beträgt 17 cm²“. Allenfalls in Anklängen lassen wir etwas von der Unterscheidung Figur – Größenbegriff merken: „Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt 17 cm²“ oder „die Kreisfläche ist 10 m² groß“. Bei den ebenen geometrischen Figuren benutzen wir das Wort *Fläche* sowohl für die Figur als auch für das Größenmaß Flächeninhalt.

Eine *Strecke* hat eine gewisse *Länge*.

Ein *Körper* hat einen gewissen *Rauminhalt*.

Aber: Eine *Fläche* (Flächenstück) hat eine gewisse *Fläche* (Flächeninhalt).

Nicht zuletzt diese begriffliche Verschwommenheit trägt zu den Schwierigkeiten mit dem Begriff des Flächeninhalts bei.

Wir empfehlen aus diesen Gründen folgende **Maßnahmen zur Überwindung der genannten Schwierigkeiten:**

1. In Klasse 5 werden keine Rechtecksflächen berechnet, sondern **alle zu ermittelnden Flächengrößen werden durch direkte Messung mit Flächenmessgeräten (Rasterfolien) gemessen**. Da die Seitenlängen in Klasse 5 immer ganzzahlig sind, ist dies kein Problem. Natürlich kann der Messprozess auch gedanklich oder andeutungsweise durchgeführt werden: Man zeichnet ein Messquadrat ein. Bestimmt dann wie viele in eine Reihe passen und zählt dann die Reihen. Schüler kommen von selbst auf diese Idee.

Aufgabe 1:

Schätzen Sie den Flächeninhalt verschiedener Rechtecksflächen (Briefmarken, Briefe, Postkarten, Seitenflächen beliebiger Gegenstände, Heftseiten, DIN-A4-Blatt, Sitzfläche des Stuhles, Tischfläche, u.v.a.m.).

Messen Sie danach die Flächenstücke aus mit Rasterfolien mit Dezimeterquadraten bzw. Zentimeterquadraten bzw. Heftkaros bzw. Millimeterquadraten. Korrigieren Sie damit Ihre Schätzung.

2. Ganz analog zum Fall der Rauminhalte muss **ein System von Standardrepräsentanten für Flächeninhalte** aufgebaut werden. Es ist wieder unerlässlich, dass in Klasse 5 über längere Zeit ein Wandplakat das Klassenzimmer schmückt, auf dem ein Meterquadrat mit einem Raster von 100 Dezimeterquadraten gezeichnet ist. Auch eine einzelne Reihe mit 10 Dezimeterquadraten darf nicht fehlen, damit die Umrechnung klar wird. Weiter folgt ein Dezimeterquadrat mit einem Raster von 100 Zentimeterquadraten und eine einzelne Reihe mit 10 Zentimeterquadraten. Schließlich noch ein Zentimeterquadrat mit 100 Millimeterquadraten. Damit haben die Schüler zeitlebens eine anschauliche Vorstellung von 1 mm^2 , 10 mm^2 , 1 cm^2 , 10 cm^2 , 1 dm^2 , 10 dm^2 , 1 m^2 . Außerdem wird man wieder eine Tabelle mit Standardrepräsentanten anlegen:

Aufgabe 2:

Ergänzen Sie folgende Tabelle mit geeigneten Standardrepräsentanten für Flächeninhalte.

1 ha	10 a	1 a	10 m ²	1 m ²	10 dm ²	1 dm ²	10 cm ²	1 cm ²
Sportplatz		Wohnung Klassen- zimmer		Wandtafel- flügel Fenster Tischfläche				Finger- nagel

3. Gewöhnen Sie sich als Lehrer an, ebene Figuren **nicht** als **Linienfiguren sondern** immer als **Flächenfiguren** (Schraffur oder farbiges Anlegen) zu präsentieren wann immer es um Flächeninhalte geht.
4. Versuchen Sie, durch eine **konsequente Sprechweise** den Größenbegriff „Flächeninhalt“ von der Figur abzulösen. Beispiele:
- „Die Rechtecksfläche hat einen Flächeninhalt von 50 cm^2 .“
 - „Die Rechtecksfläche misst 50 cm^2 “. „Die Kreisfläche misst 50 cm^2 .“
 - „Der Flächeninhalt des Dreiecks (oder der Dreiecksfläche) beträgt 15 m^2 “.usf.

Wie die Beispiele zeigen, muss die verbale Ausdrucksweise durch diese Forderung nicht unnötig umständlich werden.

Aufgabe 3:

Wie viele verschiedene Rechtecke kann man mit 36 kongruenten Quadraten (Plättchen, Kärtchen, Heftkaros etc.) legen?

Wie lang ist jeweils der nötige „Zaun“ um das Rechteck? In welchem Fall ist der Zaun am kürzesten?

Aufgabe 4:

Wie viele verschiedene Rechtecke kann man mit 36 Streichhölzern (Zahnstochern, gleichlangen Stäben; Karolängen im Heft; etc.) einzäunen?

Wie viele Quadrate (mit einem Streichholz als Seitenlänge) sind jeweils eingezäunt?

Aufgabe 5:

Welche didaktischen Absichten werden mit Aufgaben von der Art wie Aufg. 3 und 4 verfolgt? Nennen Sie weitere sinnvolle Aktivitäten zur Erreichung dieser Ziele.

2. Flächeninhalte in Klasse 6.

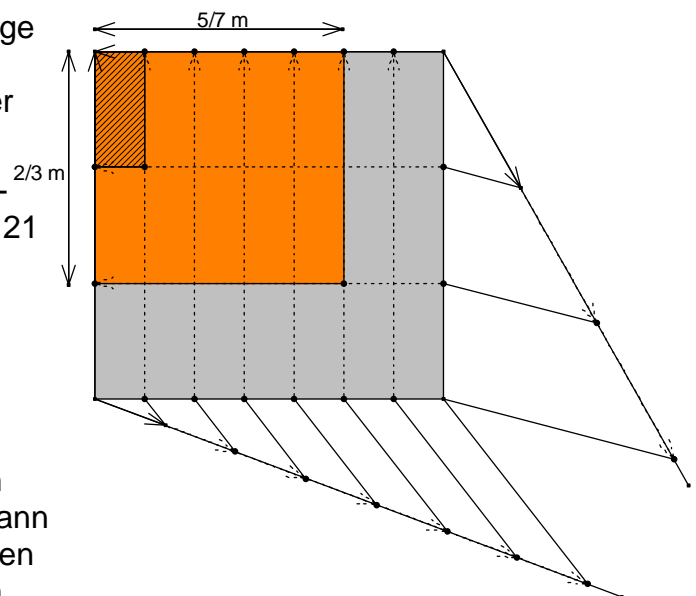
In Klasse 6 werden wie in Klasse 5 nur **rechteckige Flächenstücke** und aus solchen zusammengesetzte Flächenstücke behandelt. Neu ist hier nur, dass nicht mehr nur ganzzahlige Seitenlängen auftreten, sondern beliebige **rationale Seitenmaßzahlen**.

Zur Bewältigung dieser neuen Problemstellung gibt es im Wesentlichen zwei Methoden, die wir durch je ein Beispiel verdeutlichen wollen.

Methode 1:**Unterteilung der Seitenlängen und Benutzung eines geeigneten Messrechtecks zum Ausmessen der Rechtecksfläche.**

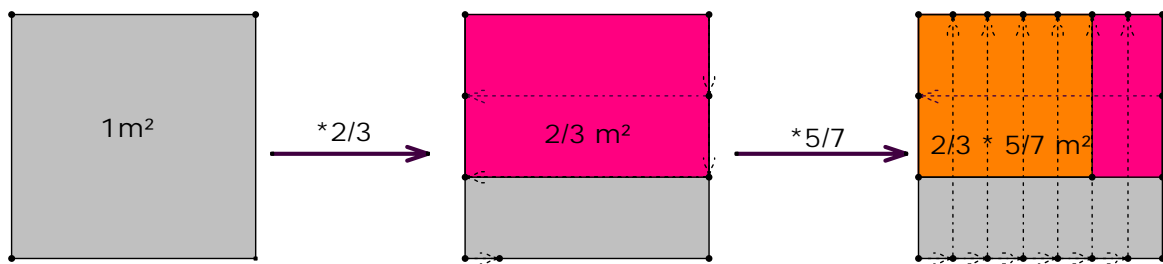
Beispiel: Welchen Flächeninhalt hat ein Rechteck mit den Seitenlängen $\frac{2}{3}$ m und $\frac{5}{7}$ m?

1. Schritt: Wir messen die Seite mit der Länge $\frac{2}{3}$ m mit der Einheit „Drittelmeter“ und analog die Seite mit der Länge $\frac{5}{7}$ m mit der Einheit „Siebtelmeter“ (Streckenteilung).
2. Nun ist ein Raster mit kongruenten Messrechtecken entstanden, von denen $3 \cdot 7 = 21$ Stück genau das Normquadrat von 1 m^2 ausfüllen, so dass eines $\frac{1}{21} \text{ m}^2$ misst.
3. Durch Abzählen bzw. Berechnen der Messrechtecke $2 \cdot 5 = 10$ erhält man den Flächeninhalt zu $A = \frac{10}{21} \text{ m}^2$.
4. Die Methode ist für alle rationalen Zahlen anwendbar. Im Fall von Dezimalzahlen kann man u.U. zu kleineren Einheiten übergehen um Ganzzahligkeit zu erzeugen. So kann z.B. $3,14 \text{ m}$ als 314 cm angegeben werden.

**Methode 2: Anwendung von Streckoperatoren**

Man geht aus vom Norm-Messquadrat und verändert dieses durch zwei aufeinanderfolgende Streckoperationen zum Rechteck mit den gegebenen Seitenlängen.

In der folgenden Skizze wird auf die Konstruktion der Streckenteilung verzichtet. Diese verläuft genau wie bei der Methode 1.



Durch häufiges Anwenden dieser beiden Methoden – nach Möglichkeit sollte jede mehrmals durchgeführt werden – kann man leicht eine Formel (Kurzform für die Ausmessstrategie) für den Flächeninhalt von Rechtecken gewinnen:

Flächeninhalt eines Rechtecks

= Messquadrat mal Seitenlängenmaßzahl1 mal Seitenlängenmaßzahl2

In dieser Form wird deutlich an den Messprozess nach einer der beiden geschilderten Methoden erinnert. Später wird man abkürzen zu:

Flächeninhalt eines Rechtecks = Länge mal Breite

$$A = a * b.$$

Empfehlung:

Hüten Sie sich davor, Inhaltsbestimmungen von Rechtecken nur noch als blinde Rechenoperationen durchzuführen. Dazu könnten Sie auch auf die Einkleidung „Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks“ verzichten. Wenn Sie Flächenbestimmungen vornehmen, sollte in irgend einer Weise an den Messprozess erinnert werden und so die Größe „Flächeninhalt“ traktiert werden. Eine einfache Methode besteht z.B. darin, dass Schüler, bevor sie rechnen, immer angeben müssen mit welchen Messquadraten sie ausmessen z.B. Zentimeterquadrate, Meterquadrate etc. Man kann auf diese Weise zusätzlich peinliche Fehler vermeiden, die etwa bei folgender Aufgabenstellung auftreten könnten:

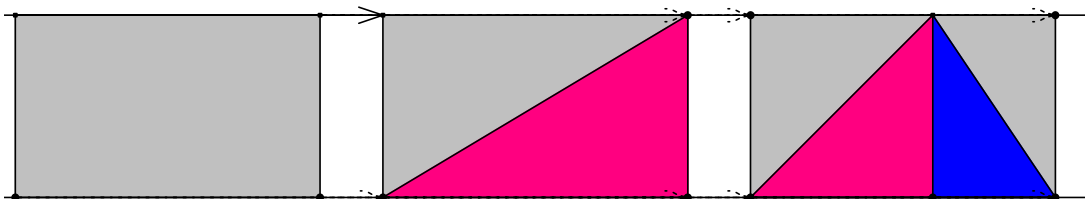
Welchen Flächeninhalt hat ein Rechteck mit Seitenlängen $a = 234,5 \text{ cm}$ und $b = 4,67 \text{ m}$?

3. Flächeninhalte von Dreiecken, Vierecken und beliebigen Vielecken (ab Klasse 7)

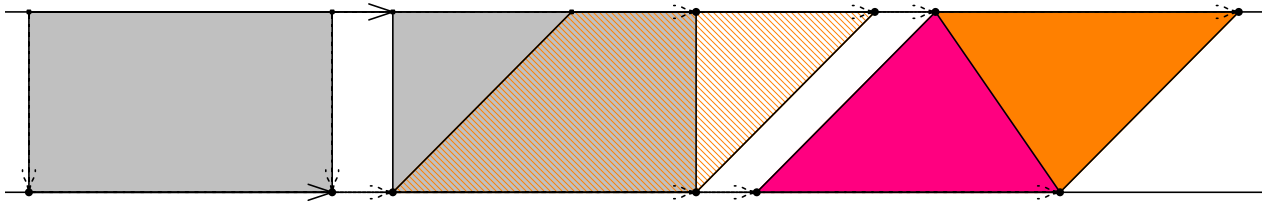
Grundlegende **Leitlinie** der Flächenbestimmung sollte stets sein, die betreffende **Fläche in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln**, bzw. sie durch **Zerlegen** oder **Ergänzen** zu einem Rechteck zu verändern.

Im Prinzip kann man nun auf zwei verschiedenen Linien an die Vielecke herangehen:

- Entweder durch Rechteckshalbierung längs einer Diagonalen vom Rechteck zum *rechtwinkligen Dreieck*, dann zum *beliebigen Dreieck* und dann zu *Parallelogrammen* und beliebigen Vier- und Vielecken.



- Alternativ dazu kann man den Weg vom *Rechteck* zum *Parallelogramm* und von diesem zum *beliebigen Dreieck* und zu beliebigen Vierecken und Vielecken gehen.



Mit diesen beiden Wegen sind auch schon einfache methodische Zugänge zur Behandlung der Flächeninhalte von Vielecken aufgezeigt. Man hüte sich davor, mit jeweils einem einzigen Beispiel für die Schüler eine Formel herzuleiten und dann nur noch blind diese Formel anzuwenden. *Dies ist der sicherste Weg zum Misserfolg!*

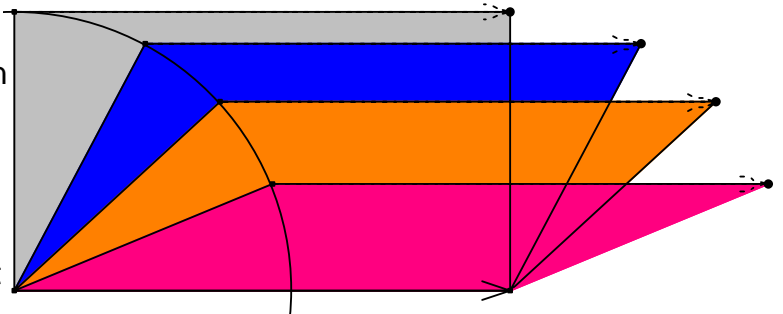
Empfehlenswert ist es, zunächst Parallelogramme zu behandeln und deren Fläche stets in ein inhaltsgleiches Rechteck zu verwandeln. Im einfachsten Fall geht das durch Abschneiden eines Dreiecks und Ansetzen auf der anderen Seite, so dass sich als Formel für die Berechnung des Flächeninhalts eines Parallelogramms ergibt:

Flächeninhalt des Parallelogramms = Grundseite mal zugehörige Höhe.

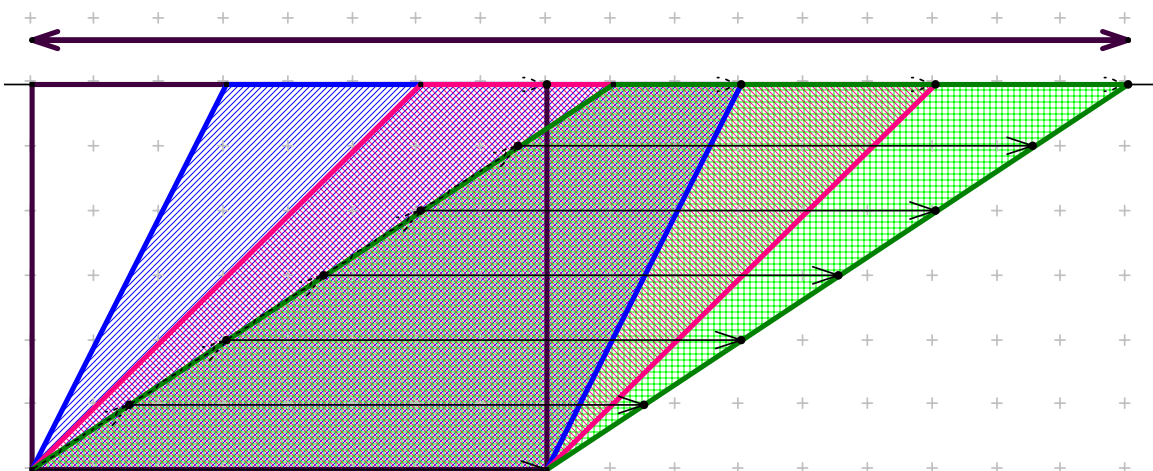
Dies ist unproblematisch, solange man die längere Parallelogrammseite als Grundseite hat. Da jedoch die Formel allgemeingültig sein soll, muss sie auch mit der kürzeren Seite als Grundseite gelten.

Das kann man sich mit Hilfe des Scherungsprinzips (Cavalieri-Prinzip für Flächen) klarmachen. Gut demonstrieren lässt sich dies mit Hilfe zweier Modelle.

Das eine ist ein Gelenkparallelogramm, bei dem man durch Verändern lauter **umfangsgleiche Parallelogramme** (Seitenlängen bleiben konstant) aber mit verschiedenen Flächeninhalten erhält.



Im Gegensatz dazu steht das zweite Modell, das man mit einem Geobrett mit Schieber und gespannten Gummifäden realisieren kann. Durch Verschieben der oberen Nagelreihe erhält man lauter Parallelogramme die aus gleich vielen Einzelstreifen von jeweils gleichem Flächeninhalt gebildet werden, also **inhaltsgleiche Parallelogramme**.

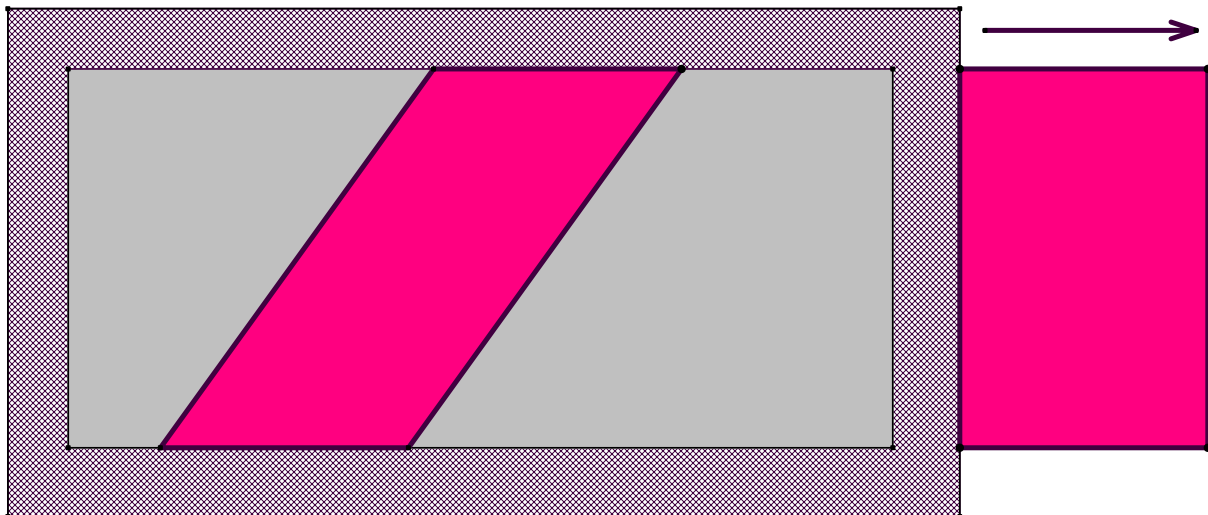


Mit dem zuletzt beschriebenen Modell, einem Geobrett mit Schieber, kann man sehr anschaulich und direkt das Cavalieri-Prinzip oder Scherungsprinzip für Flächeninhalte sowohl für Parallelogramme als auch für Dreiecke demonstrieren. Man muss sich nur die Veränderung der einzelnen Streifen, deren Anzahl sich beim Scheren ja nicht ändert, verdeutlichen: was links weggenommen wird kommt rechts dazu, d.h. jeder Streifen bleibt in seiner Gesamtflächengröße gleich. Das wichtige Ergebnis ist:

Parallelogramme mit gleicher Grundseite und Höhe sind flächeninhaltsgleich.

Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe sind flächeninhaltsgleich.

Ein weiteres sehr anschauliches, ja geradezu verblüffendes, Modell zur Demonstration der Parallelogrammfläche ist das Folgende: Aus einem Rahmen lässt sich ein Schieber ziehen, der innen schräg angeschnitten ist. Beim Ziehen entsteht innen eine freie Parallelogrammfläche und außen eine gleichgroße (warum?) Rechtecksfläche. Der Zusammenhang lässt sich unmittelbar sehen („Methode des scharfen Hinsehens“). Hinweis: An der entsprechenden Geo-Datei „Parall-Schieber.geo“ können Sie direkt am Parallelogramm ziehen und es verändern, das Rechteck verändert sich mit!



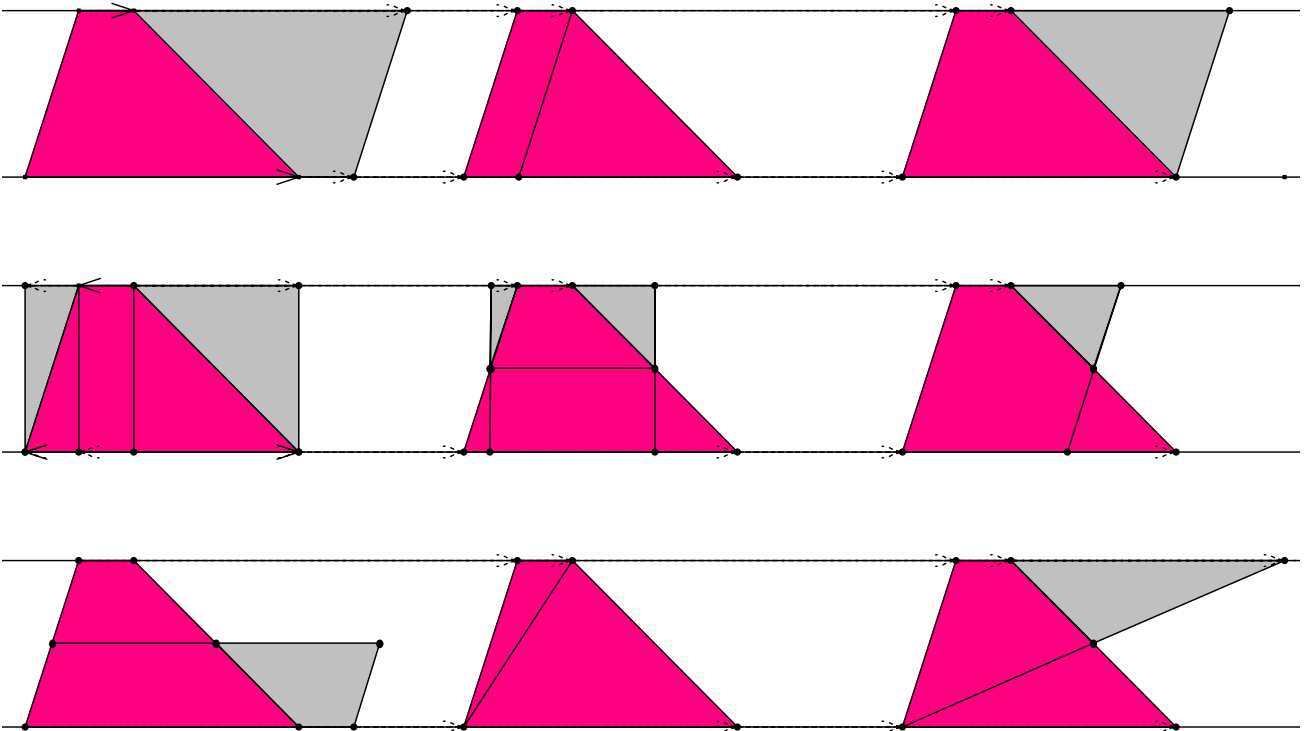
Es erscheint mir noch einmal wichtig, auf die **Nutzlosigkeit blinden Formelhandelns** hinzuweisen. Sie erreichen an Verständnis und Kompetenz bei Ihren Schülern mehr, wenn Sie wenige Beispiele einsichtsvoll und gründlich unter Zurückführung auf die wesentliche Idee des Verwandeln in ein inhaltsgleiches Rechteck behandeln, als wenn Sie Kolonnen von gleichartigen Rechenaufgaben mit Formeln ausrechnen lassen. *Die Formeln werden bald vergessen oder verwechselt, aber die tätige Erfahrung des Umgangs mit den realen Flächenstücken wird bleiben.*

Zusammenfassend kann man sagen dass nur die Rechtecksformel $A = a \cdot b$ als Kurzform für die Strategie des Ausmessens in Reihen (vgl. Punkte 1 und 2), die Parallelogrammformel $A = g \cdot h$ und die Dreiecksformel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ als Formelwissen mit dem dazugehörigen Hintergrund verfügbar sein müssen. Auf alle anderen Formeln – auch für die von Trapezen – kann verzichtet werden.

An Stelle der Herleitung einer Formel für den Trapezinhalt sollen im folgenden Bild verschiedene Strategien gezeigt werden, nach denen man den Flächeninhalt eines Trapezes auf die bekannten Fälle Rechteck, Parallelogramm und Dreieck zurückführen kann.

Aufgabe 6:

Berechnen Sie für jedes der folgenden Bilder entsprechend der gezeigten Strategie den Flächeninhalt und entwickeln Sie so, die jeweils dazugehörige Inhaltsformel.



Aufgabe 7:

Bauen Sie sich die in diesem Abschnitt beschriebenen Modelle:
Gelenkparallelogramm; Geobrett mit Schieber; Parallelogrammschieber.

4. Flächeninhalt und Umfang von Kreisen

Vorbemerkung:

Wie bei den Vielecken auch, sollten nicht allein Berechnungen von Umfang und Flächeninhalt im Vordergrund stehen, sondern auch die Geometrie zu ihrem Recht kommen. Empfohlen wird z.B. die Behandlung der Symmetrien eines Kreises (Dreh- und Spiegelsymmetrie), die möglichen Lagen von Gerade und Kreis (Sekante, Tangente, Passante), die möglichen Sehnenlängen und die Lage der Sehne bezüglich des Mittelpunkts (z.B. dass die Mittelsenkrechte einer Sehne stets durch die Kreismitte verläuft). Einfache Kreisteilungen (Sektoren) erhält man durch entsprechende Teilung des Mittelpunktswinkels, das bietet eine Wiederholung der Winkeltypen und -maße an.

Aufgabe 8:

Gegeben ist eine Kreislinie ohne Mittelpunkt. Wie kann man den Mittelpunkt finden (konstruieren!)? Geben Sie mehrere Möglichkeiten an.
Handwerker besitzen ein Gerät zu diesem Zweck. Wie könnte dieses aussehen?

Bei der Behandlung des **Flächeninhalts** (= Größe der Kreisfläche) und des **Umfangs** (= Länge der Kreislinie) wird man in der Regel mit dem Umfang beginnen, es geht jedoch auch umgekehrt – vielleicht sogar mit mehr Erfolg! Wir beschreiben in Kurzform beide Wege.

Stufe 1: Problemvermittlung und erste Abschätzungen

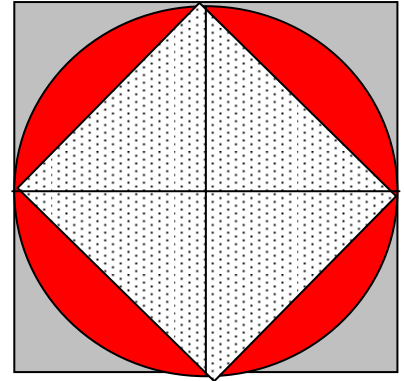
Jeglicher quantitativen Überlegung vorausgehen muss eine **Problemvermittlung**: Worum geht es bei der Fragestellung überhaupt? Dazu kann man z.B. von Messaufgaben ausgehen (man muss die Flächengröße eines Kreises messen) oder z.B. von der Frage, wie viel Abfall man hat, wenn man aus einer quadratischen Sperrholzplatte einen möglichst großen Kreis aussägen will. Solche vorausgehenden Schätzungen erhöhen bei Schülern die Erwartungshaltung und binden in die Fragestellung ein (Motivationswert).

Für den **Flächeninhalt** (= Größe der Kreisfläche) betrachtet man zuerst das dem Kreis ein- und umbeschriebene Quadrat und gewinnt leicht die folgende Abschätzung (Faustformeln):

Die Kreisfläche beträgt etwa

$\frac{3}{4}$ vom Durchmesserquadrat oder $A \approx \frac{3}{4} * d^2$

das Dreifache vom Radiusquadrat. $A \approx 3 * r^2$



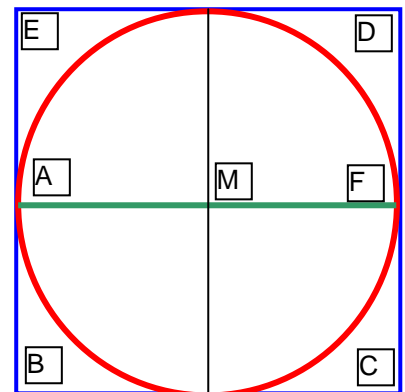
Ganz analog kann man für den **Umfang** (=Länge der Kreislinie) durch Betrachtung und Abschätzung möglicher Wege eine erste grobe Abschätzung gewinnen:

Man betrachtet die folgenden Wege und stellt für deren Länge eine Tabelle auf:

Weg 1: Von A über M bis F und wieder auf gleichem Weg zurück.

Weg 2: Von A über B, C, F, D, E entlang dem Außenquadrat wieder zurück zu A.

Weg 3: Von A entlang der Kreislinie einmal rund herum wieder zurück bis A.



Man gewinnt leicht die folgende Abschätzung:

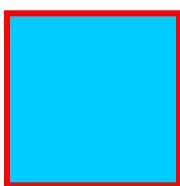
Der Umfang des Kreises ist länger als $2*d$ aber kürzer als $4*d$, also etwa $3*d$.

Der Umfang eines Kreises beträgt etwa

das Dreifache vom Durchmesser bzw. $u \approx 3 * d$ $u \approx 6 * r$
das Sechsfache vom Radius.

Zusammenfassend erhält man:

Sowohl der Umfang als auch der Flächeninhalt eines Kreises betragen etwa drei Viertel von denen des umschriebenen Quadrats (Durchmesserquadrat).



$$u = 4 * d$$

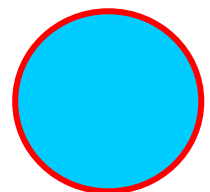
$$A = d^2$$

$* \frac{3}{4}$



$$u \approx 3 * d$$

$$A \approx \frac{3}{4} * d^2$$



Man wird einwenden, nun habe man zwar ein ungefähres Wissen, aber nichts Genaues. Das sollte jedoch nicht unterbewertet werden. Ich bin der Meinung, dass dieses informelle Wissen, das man sich durch Betrachtung der entscheidenden Figur „Kreis mit Umquadrat“ jederzeit wieder klarmachen kann, das entscheidende Wissen sein sollte, das nachhaltig bei den Schülern zu verankern und abzusichern ist. Die Formeln vergessen sie ohnehin schnell wieder oder sie verwechseln sie. Deshalb ist meine dringende Empfehlung, mit diesen Faustformeln überschlägige Berechnungen durchzuführen: Zu gegebenen Radien oder Durchmessern werden Umfang und Flächeninhalt im Überschlag berechnet und umgekehrt. Ich halte diese inhaltlich orientierte Arbeit des überschlägigen Bestimmens mit jeweiliger Aktivierung des oben genannten Fundamentalwissens für ungemein fruchtbarer als das stupide Abarbeiten von vielen gleichartigen Aufgabenpäckchen zur Berechnung von Umfang und Flächeninhalt von Kreisen mit den genauen Formeln – womöglich noch mit dem Taschenrechner! Hat man im Übrigen genügend Übungen der beschriebenen informellen Art mit den Schülern durchgeführt, so ist es überhaupt kein Schaden, wenn man nach Erarbeitung der genauen Formeln alles mit dem Taschenrechner rechnet.

Aufgabe 9:

- a) Um einen Baumstamm wird ein Seil gelegt. Es ist 9 m lang. Welchen Durchmesser hat der Baumstamm? Von diesem Stamm wird eine runde Tischplatte abgesägt. Welchen Flächeninhalt hat die Tischplatte
- b) Fülle folgende Tabelle aus. Benütze die Faustregeln. Berechne überschlägig.

Gegenstand	Bierdeckel	Mittelkreis (Fußballfeld)	2-€-Münze	Herdplatte	Plakatsäule
Radius		9,15 m			
Durchmesser	10 cm				
Umfang			81 mm		
Umquadratfläche					4 m ²
Kreisfläche				300 cm ²	

Stufe 2: Erste Verschärfung der Faustformeln. Bestimmung der Kreiszahl Pi.

Man wird irgendwann die Frage stellen, ob die Faustformeln nun genau sind oder nicht. Dazu untersucht man für den Umfang das regelmäßige Sechseck im Kreis und für den Flächeninhalt das regelmäßige Zwölfeck.

Aufgabe 10:

- a) Konstruieren Sie einen Kreis mit einbeschriebenem regelmäßigem Sechseck. Berechnen Sie den Umfang des Sechsecks. Schätzen Sie damit den Kreisumfang ab.
- b) Konstruieren Sie einen Kreis mit einbeschriebenem regelmäßigem Zwölfeck. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Zwölfecks. Schätzen Sie damit den Flächeninhalt des Kreises ab.

In beiden Fällen erhält man:

Der Wert muss etwas größer sein als die betreffende Faustformel angibt.

Es geht nun darum, die Kreiszahl pi, die etwas größer als 3 sein muss, zu ermitteln.

Für die Hauptschule (teilweise auch für schwache Realschulklassen) genügt dafür eine experimentelle Ermittlung: Man misst von vielen kreisrunden Gegenständen Umfang und

Durchmesser möglichst genau (eine praktische Herausforderung!) und bestimmt den Quotienten u/d . Dieser ergibt die Kreiszahl π .

Eine andere experimentelle Art, die Kreiszahl π zu ermitteln führt über den Flächeninhalt. Man zeichnet auf mm-Papier sehr genau einen Kreis z.B. mit Radius 10 cm. Zählt man nun sorgfältig alle Millimeterquadrate innerhalb z.B. des Viertelkreises aus (angeschnittene Millimeterquadrate werden entweder grundsätzlich halb dazugezählt oder gegeneinander abgeschätzt), so kann man die Kreisfläche sehr genau bestimmen (eine sinnvolle Strafarbeit!). Der Quotient $A:r^2$ ergibt dann wieder einen genäherten Zahlenwert für π .

Ein Hinweis auf mögliche Berechnungswege z.B. nach Archimedes durch Annäherung mit ein- und umbeschriebenen regelmäßigen n -Ecken und zunehmender Eckenverdopplung und einigen historischen Details zur Kreiszahl π sollte diesen Schritt abrunden.

Hinweis:

Man erhält die exakten Formeln, wenn man in den Näherungsformeln die Zahl 3 durch die Kreiszahl π ersetzt:

Sowohl der Umfang als auch der Flächeninhalt eines Kreises betragen exakt das $\frac{\pi}{4}$ -fache der entsprechenden Größen des umschriebenen Quadrats.

Kreisumfang

$$u = \pi * d = 2 * \pi * r$$

Kreisinhalt

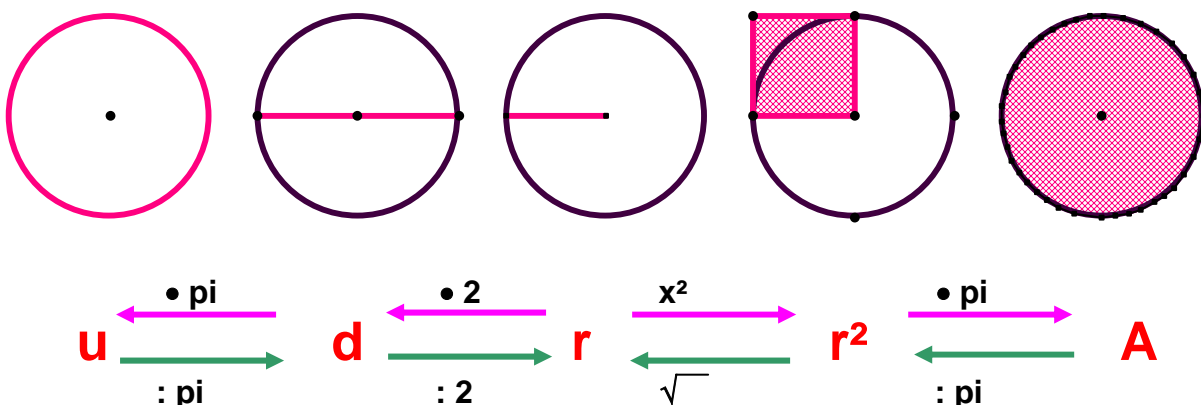
$$A = \frac{\pi}{4} * d^2 = \pi * r^2$$

Besonders für Hauptschüler, die algebraische Termumformungen nicht so gut beherrschen, ist es hilfreich, eine Übersicht zu erstellen, in der die Zusammenhänge beim Kreis noch einmal in Kurzform dargestellt sind. Mit Hilfe dieser Übersicht ist es leicht möglich, zu gegebener Kreisfläche z.B. den Kreisumfang zu ermitteln.

Aufgabe 10:

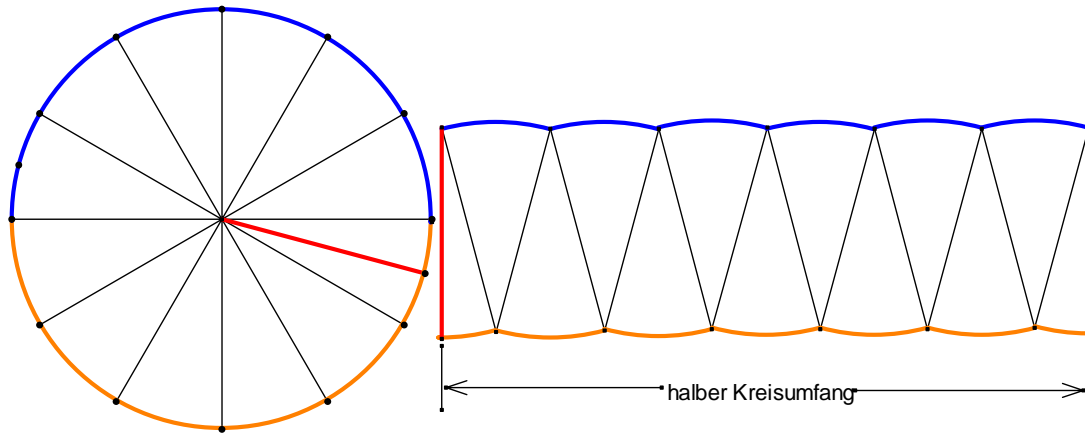
Ein Kreis hat den Flächeninhalt 100 m². Ermittle seinen Umfang.

Zusammenhänge am Kreis:



Zusammenhang zwischen Kreisinhalt und Kreisumfang:

Es ist nicht unbedingt selbstverständlich, dass die Kreiszahl pi sowohl beim Kreisumfang als auch beim Flächeninhalt dieselbe Zahl ist. Dies wird jedoch klar, wenn man sich den Zusammenhang zwischen Umfang und Flächeninhalt am sogenannten „Sektorenmodell“ klar macht. Mit diesem Zusammenhang reduziert sich die Bestimmung von pi entweder auf den Inhalt oder auf den Umfang:



Man erhält:
$$A = \frac{u}{2} * r$$

Ergänzungen:

1. Zum fachlichen Hintergrund vergleiche man die Datei „Kreis-Inh-Umf.doc“.
2. Die wichtigsten Methoden zur numerischen Bestimmung der Zahl pi sind einmal die Methode des Archimedes mit ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecken sowie Methoden der Integralrechnung (z.B. die Streifenmethode). Dazu vergleiche man etwa die Excel-Datei „Pi-Berechnungen.xls“.
3. Eine numerisch bedeutsame Methode hat sich Nikolaus von Kues (1401 – 1464) ausgedacht: Zu vorgegebenem festem Umfang u wird der Radius des ein- bzw. umbeschriebenen regelmäßigen n -Ecks berechnet und so der Kreis eingeschachtelt.
4. Literatur zur Geschichte der Zahl pi:

W. Lietzmann;	Altes und Neues vom Kreis.
E. Beutel;	Zur Geschichte der Zahl π .
Petr Beckmann	A History of π . Golem Press; New York 1977.
Mäder, Peter	In: ZDM 1989, Heft 2; S. 50 ff

Anhang: Materialien zu einer Schulstunde: Flächeninhalt von Kreisen

Klasse 9; Realschule Stuttgart Freiberg; Frau Donat-Keith; 1.Praxistag SS 99. 4. Stunde: 10.30 - 11.15

Vorbemerkungen:

Schule und Klasse sind für mich neu. Ich habe vorab nur einen Informationsbesuch gemacht. Daher wird es schwierig sein, die Namen der Schüler kennenzulernen, das Niveau sowie die Arbeitshaltung in Tempo und Schwierigkeitsgrad abzuschätzen. Ein Einstieg in ein neues Gebiet (Kreisberechnungen) soll diese Schwierigkeiten abfedern helfen.

Es wird der Versuch gemacht, den Mathematikunterricht im Sinne des nachhaltigen und verständnisvollen Lernens durch eigene Erfahrungen zu gestalten. Möglicherweise geht dies auf Kosten des angestrebten Ziels in der vorgegebenen Zeit. Deshalb soll stets problemorientiert erarbeitet und möglichst wenig „gelehrt“ werden.

Planung:

1. Phase: 10.30 - 10.35 Uhr

- Kontaktsuche mit den Schülern. Namen. Einführendes Gespräch. Vorhaben. Aufmunterung.
- Zielangabe: Flächeninhalt und Umfang von Kreisen. Dazu Vorkenntnisse reaktivieren zur Wiederholung, Vorbereitung und zum Aufwärmen.

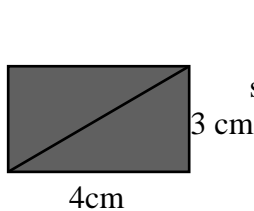
2. Phase: 10.35 – 10.45 Uhr

Heftaufschrieb (auch Tafelanschrieb): Kreisberechnung.

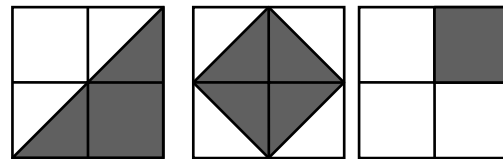
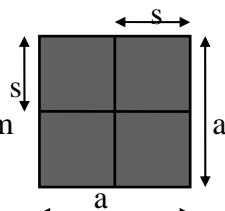
Vorübungen: [Rechteck und Dreieck vorab behandeln; danach Überlegungen am Quadrat.]

Freihandskizzen im Karoraster!

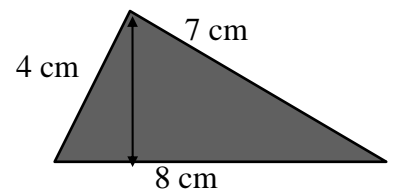
Rechteck



Quadrat



Dreieck



Fläche und Umfangslinie in anderer Farbe gestalten: Flächenstücke rot, Umfangslinien gelb (grün).

$$A = l * b \\ = 3\text{cm} * 4\text{cm}$$

$$u = 16 \text{ cm}$$

$$A = a^2 = (2s)^2 \\ = 4 s^2$$

$$u = 4 a = 8 s$$

$$A = \frac{1}{2} * a^2 \\ = 2 * s^2$$

$$u = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$A = (a/2)^2 = \frac{1}{4} a^2 \\ = s^2$$

$$u = 4\sqrt{2} \quad u = 4 s = 2 a$$

$$A = \frac{1}{2} * g * h \\ = \frac{1}{2} * c * h_c$$

$$u = 19 \text{ cm}$$

3. Phase: 10.45 – 10.55 Uhr (Pufferphase, kann ggf. entfallen evtl. Ersatz: Abschätzen).

Arbeitsteilige Stillarbeit (einzeln oder in Partnerarbeit):

Im Heft werden im Karoraster freihändig folgende Flächengrößen markiert:

Ein *Rechteck*, ein *Parallelogramm* (nicht rechteckig), ein *Trapez* (nicht Par.), *Quadrat*, *Dreieck* mit einem Flächeninhalt von jeweils 1 cm² (Gruppe I), 2 cm² (II; Vorsicht, ein Problem!), 4 cm² (III).

4. Phase: 10.55 – 11.10 Uhr (Hauptphase)

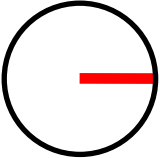
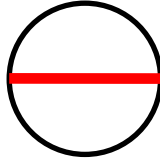
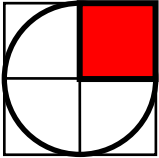
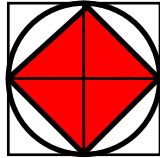
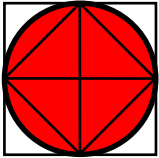
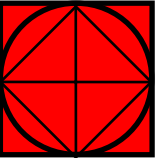
Gemeinsam mit Folie: Problemorientiertes Bearbeiten des *Arbeitsblattes*. Erste zwei Zeilen gemeinsam. Dann Fortführung in Partner- oder in Einzelarbeit. Hauptphase soll zur wesentlichen Erkenntnis leiten.

5. Phase: 11.10 – 11.15 Uhr

Ergebniszusammenführung: Merksätze. *Folie*. Heftaufschrieb zu Hause: Zeichnungen sowie r - und d-Zeile mit den beiden Faustformeln und in eigenen Worten.

6. Kontroll- und Einprägphase (Anwendung bzw. Transfer des hoffentlich gewonnenen Wissens). H.A.

1. Zusammenfassung:

					
Radius	Durchmesser	Radiusquadrat	Inquadrat	Kreisscheibe	Umquadrat
r					
	d				

Merksätze:

1. Die Kreisfläche beträgt etwa drei Viertel vom Durchmesserquadrat (Umquadrat).
2. Die Kreisfläche beträgt etwa das Dreifache vom Radiusquadrat

$$A \approx \frac{3}{4} * d^2$$

$$A \approx 3 * r^2$$

2. Hausaufgabe: Benütze die obenstehenden Faustformeln. Fülle die Tabelle aus.

	Radius r	Durchmesser d	Radiusquadrat r ²	Durchmesser- quadrat d ²	Kreisfläche A _o
Pfennigstück		16 mm			
Querschnitt eines Drahtes					6 mm ²
Fünfmärkstück		3 cm			
Bierdeckel				100 cm ²	
CD - Scheibe	6 cm				
Kochplatte					300 cm ²
Schallplatte	15 cm				
Esstisch				1 m ²	
Mittelkreis im Fußballplatz	9 m				
Eifelmaar		700 m			
Ries			144 km ²		
Pipelinequerschnitt			¼ m ²		
Kolbenquerschnitt					48 cm ²

3. Wie genau ist die Faustformel $A \approx 3 * r^2$?

Zeichne in einen Kreis ein regelmäßiges Zwölfeck und berechne dessen Flächeninhalt. Verbinde dazu eine Ecke mit der übernächsten Nachbarecke und beachte, welche Länge diese Strecke hat und welche Rolle sie für die beiden Teildreiecke des Zwölfecks spielt!

dazu, daß zwei nebeneinanderliegende Teild

Name:

Krauter

Flächeninhalt von Kreisen.

SchulprKreis.doc

1. Berechne die fehlenden Werte wie im 1. Beispiel vorgegeben. Schätze dann den Flächeninhalt der Kreisscheibe. Vergleiche zur Kontrolle die Zeichnungen.

Radius	Durchmesser	Radiusquadrat	Inquadrat	Kreisscheibe	Umquadrat
1 cm	2 cm	1 cm ²	2 cm ²		4 cm ²
2 cm					
3 cm					
4 cm					
5 cm					
6 cm					
7 cm					
8 cm					
9 cm					
10 cm					
25 m					
x m					
r					
	64 m				
	x m				
	d				
		36 m ²			
		256 m ²			
		r ²			
			98 m ²		
			32 m ²		
					100 m ²
					324 m ²
					d ²
				192 m ²	

2. Betrachte die Tabelle und die Zeichnungen genau. Fasse deine Beobachtungen zusammen und ergänze die Textlücken der folgenden Merksätze:

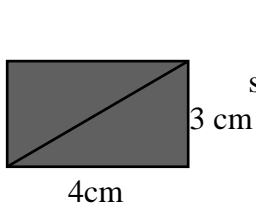
1. Die Kreisscheibe bedeckt etwa des Umquadrats.
2. Eine Kreisscheibe mit dem Durchmesser d hat etwa den Flächeninhalt: $A \approx \text{---} * d^2$
3. Die Kreisscheibe bedeckt etwa Radiusquadrate.
4. Eine Kreisscheibe mit Radius r hat etwa den Flächeninhalt: $A \approx \text{---} * r^2$

Kreisberechnung

Vorübungen:

[Zuerst Rechteck und Dreieck behandeln, dann die Quadratvarianten. Fläche und Umfangslinie in anderer Farbe gestalten: Flächenstücke rot, Umfangslinien gelb (grün).]

Rechteck

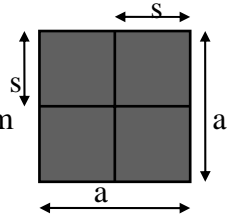


$$A = l * b$$

$$= 3\text{cm} * 4\text{cm}$$

$$u = 16\text{ cm}$$

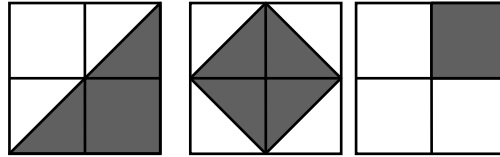
Quadrat



$$A = a^2 = (2s)^2$$

$$= 4 s^2$$

$$u = 4 a = 8 s$$

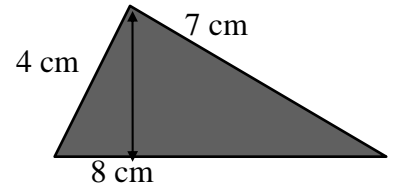


$$A = \frac{1}{2} * a^2 = \frac{1}{4} a^2$$

$$= 2 * s^2 = s^2$$

$$u = 4 + 2\sqrt{2} \quad u = 4\sqrt{2} \quad u = 4 s = 2 a$$

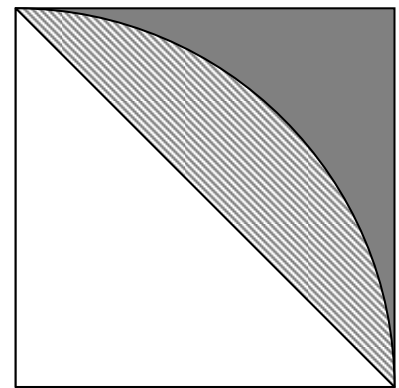
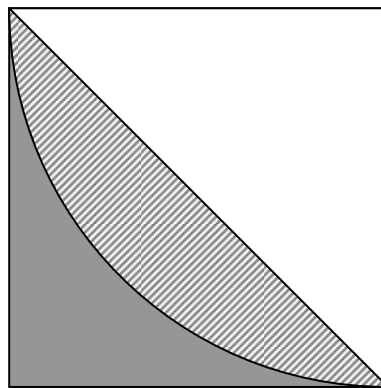
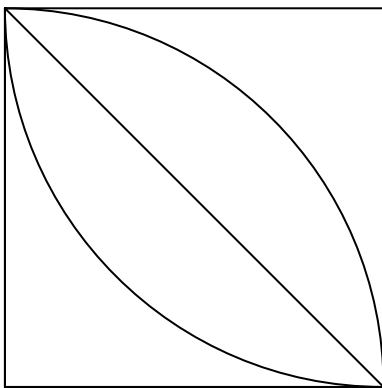
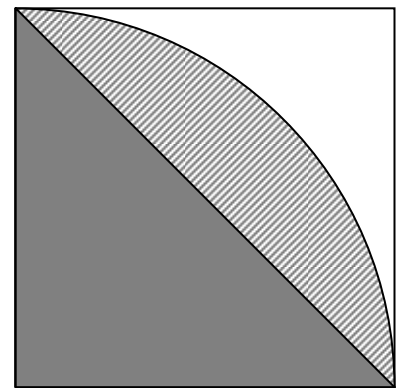
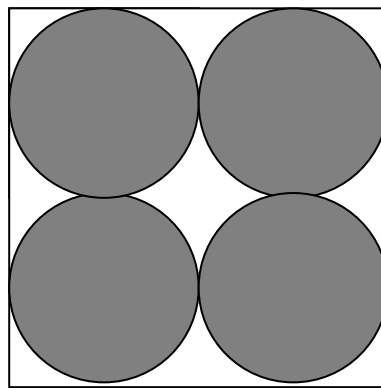
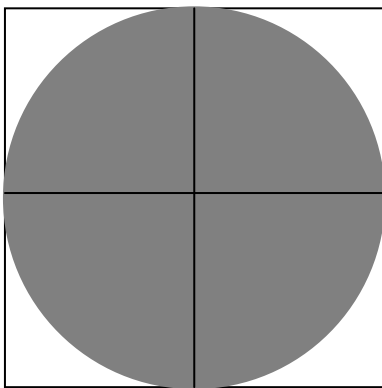
Dreieck



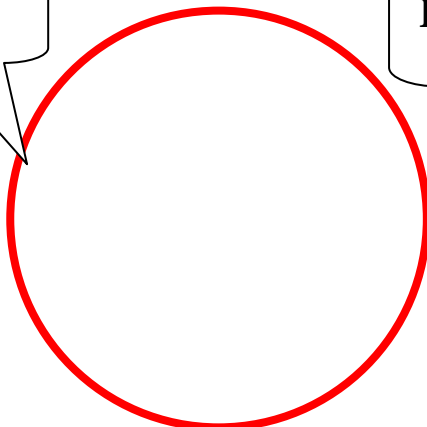
$$A = \frac{1}{2} * g * h$$

$$= \frac{1}{2} * c * h_c$$

$$u = 19\text{ cm}$$



Kreislinie



Kreisfläche

