

**Fachdidaktik Geometrie für Studiengang R und H alte PO.****Klausur am Freitag 21. Oktober 2005**

Bitte füllen Sie die persönlichen Angaben auf diesem Blatt deutlich lesbar in Druckschrift aus und geben Sie das Blatt in Ihrem Doppelbogen mit ab.

***Persönliche Angaben:***

Name	Vorname	Matr.-Nr.	Sem. im <b>SS-05</b>

***Klausurergebnis:***

<b>A1</b>	<b>30 P</b>	<b>A2</b>	<b>30 P</b>	<b>A3</b>	<b>30 P</b>
<b>30 min</b>		<b>30 min</b>		<b>30 min</b>	
<b>a) 8</b>	<b>b) 6</b>	<b>c) 16</b>	<b>a) 10</b>	<b>b) 10</b>	<b>c) 10</b>
			<b>Stufen</b>	<b>Z. u. Inh.</b>	<b>Aufg.</b>
			<b>8</b>	<b>10</b>	<b>12</b>
<b>Klausurergebnis:</b>					

***Zugelassene Hilfsmittel:***

- Ein nicht programmierbarer Taschenrechner.
- Schreib- und Zeichenwerkzeug.
- Ein namentlich gekennzeichnetes Blatt DIN-A4 mit eigenen Notizen.

***Die Lösungen sind sauber und vollständig auf (kariertem oder unliniertem) Doppelbogen DIN A 4 mit üblichem Kopf und Rand darzustellen.***

***Die Form wird mit bewertet.***

***Alle Lösungen sind knapp, aber hinreichend zu begründen.***

***Konstruktionen müssen eindeutig erkennbar sein (ggf. stichwortartig beschreiben).***

**Arbeitszeit: 60 Minuten.**

<b>Gewertet werden die Aufgabe <u>1</u> sowie <u>eine</u> der Aufgaben <u>2</u> oder <u>3</u>.</b>
--

### **Aufgabe 1:**

Sie sollen im Geometrieunterricht in Klasse 8 oder 9 (der Satz des Pythagoras ist zuvor schon behandelt worden) das Thema „**Pyramiden**“ behandeln.

- a) Welche inhaltlichen Zielvorstellungen würden Sie dabei verfolgen?  
(Bitte nur kurz bzw. stichwortartig aufzählen; mindestens 3 maximal 6 Ziele).
- b) Welche Art von *Pyramidenmodell* würden Sie dabei einsetzen?
  - (1) Ein Vollmodell aus Styropor
  - (2) Ein Oberflächennetz aus Tonpapier
  - (3) Ein Kantenmodell mit Holzstäben oder MetallkantenBegründen Sie Ihre Aussagen.
- c) Entwerfen Sie *eine dazu passende Aufgabe für eine Klassenarbeit* nach Abschluss dieser Einheit. Geben Sie eine *Musterlösung* für diese Aufgabe.

### **Aufgabe 2:**

Schüler verwechseln häufig Formeln für **Umfang und Flächeninhalt ebener Figuren** (z. B. bei Rechtecken oder Kreisen).

- a) Welche Ursachen könnte dies haben? Zählen Sie diese stichwortartig auf (mindestens 3, höchstens 6 Gründe).
- b) Was könnte man im Unterricht tun, um nach Möglichkeit derartigen Schülerfehlern entgegenzuwirken?  
Geben Sie mindestens vier Schüleraktivitäten bzw. Aufgabenbeispiele mit den intendierten Zielstellungen an, die geeignet sind, derartige Schülerfehler zu vermeiden.
- c) Beurteilen Sie folgende Aufgabe für eine Klassenarbeit nach der Behandlung des Kreises. Geben Sie eine Musterlösung dafür an:  
  
*„Ein Gärtner soll ein  $30 \text{ m}^2$  großes halbkreisförmiges Blumenbeet mit Buchspflanzen einfassen. Die Buchspflanzen benötigen auf jeder Seite  $25 \text{ cm}$  Abstand zur Nachbarpflanze. Wie viele Pflanzen werden benötigt? Mache zuerst einen Überschlag und begründe diesen.“*

### **Aufgabe 3:**

Schildern Sie einen Zugang zur **Trigonometrie**, bei dem zuerst die Sinusfunktion behandelt wird.

Geben Sie dazu eine Stufenfolge Ihres Vorgehens an.

Benennen Sie für jede Stufe die wesentlichen Ziele und Inhalte und geben Sie jeweils einige exemplarische Aufgabenstellungen bzw. Schüleraktivitäten an.

## Lösungen zur Klausur FD – Geometrie H und R im Oktober 2005:

### Lösung zu Aufgabe 1:

a) **Raumvorstellung schulen durch Formerkundung:**

Ecken, Kanten und Flächen des Körpers. Modelle, Schnitte, Symmetrien, Netze.

**Zeichnerische Darstellungen** der Körper:

Ansichten, Schnitte, Schrägbilder, Skizzen. Verschiedene Darstellungen in Beziehung setzen.

**Längenbeziehungen am Körper klären:**  $h_k < h_s < s$ .

Schnitte, Stützdreiecke, ausgeklappte Seitendreiecke. Grundkante, Seitenkante. Berechnungen von Längen aus anderen. Zusammenhänge über rechtwinklige Dreiecke.

**Zusammensetzung und Berechnung der Oberfläche:**

n Dreiecke als Mantel, ein n-Eck als Grundfläche.

Bestimmung des **Rauminhalts:**

Vergleich mit umbeschriebener Säule.  $V = 1/3 \cdot G \cdot h$ .

- b) Selbstverständlich wird man alle drei Arten von Modellen einsetzen, da jedes eine spezifische Funktion hat, die von ihm am besten erfüllt wird (siehe a)):

**Vollmodell:** repräsentiert den Körper und insbesondere dessen Rauminhalt.

**Oberflächennetz:** repräsentiert die begrenzende Oberfläche des Körpers und insbesondere deren Flächeninhalt.

**Kantenmodell:** zeigt Ecken und Kanten und ihre Zusammenhänge und lässt mögliche Symmetrien erkennen. Ermöglicht Schrägbilddarstellung durch Schattenwurf im Sonnenlicht.

- c) Beispielaufgabe für eine Klassenarbeit:

*Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Grundkante  $a = 12 \text{ cm}$  und der Körperhöhe  $h_k = 4,5 \text{ cm}$ .*

a) *Skizziere ein Schrägbild des Körpers.*

b) *Zeichne den Körper in Draufsicht und Vorderansicht (Grund- und Aufriss).*

c) *Bestimme die Längen der Seitenkanten und der Seitenhöhe durch Zeichnung und Rechnung.*

d) *Bestimme die Oberflächengröße und den Rauminhalt der Pyramide.*

e) *Bestimme den Neigungswinkel der Seitenkanten und der Seitenflächen gegen die Grundfläche durch eine Zeichnung.*

Musterlösung:

- a) Man entwickelt aus dem Schrägbild einer Säule das der zugehörigen Pyramide, indem man die Deckfläche auf einen Punkt schrumpfen lässt. Das Schrägbild einer stehenden Säule ist leicht durch Verschieben der Grundfläche in lotrechter Richtung zu erzeugen. Bei der Vogelschau wählt man die Grundfläche in wahrer Größe.
- b) Da die Grundkante und die Körperhöhe gegeben sind, ist das Zweitafelbild kein Problem.
- c) Je nach Lage der Grundfläche erscheint im Aufriss entweder die Seitenhöhe oder die Seitenkante in wahrer Größe. Durch Ausklappen einer Seitenfläche im Grundriss kann man dann die andere Länge ermitteln.

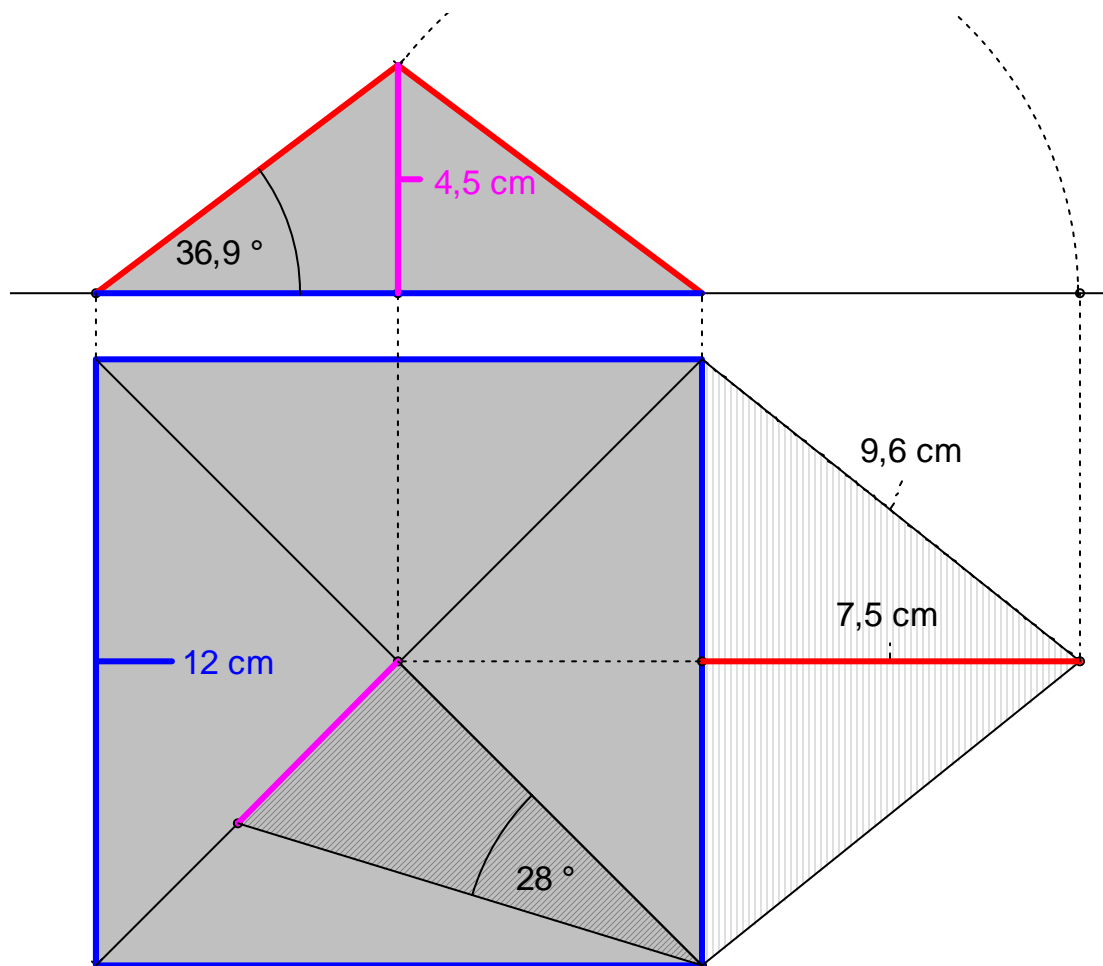
Rechnerisch ermittelt man die Seitenhöhe und die Seitenkante mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:  $h_s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_k^2} = \sqrt{36 + 20,25} = 7,5 \text{ cm}$ .

$$s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_s^2} = \sqrt{36 + 56,25} = 9,60 \dots \text{cm}.$$

- d) Die Oberfläche besteht aus dem Grundquadrat mit  $144 \text{ cm}^2$  Inhalt und den 4 Manteldreiecken mit  $4 * 6 * 7,5 \text{ cm}^2 = 180 \text{ cm}^2$  Inhalt, also insgesamt  $324 \text{ cm}^2$ .

Der Rauminhalt beträgt  $\frac{1}{3} * G * h_k = \frac{1}{3} * 144 * 4,5 = 216 \text{ cm}^3$ .

- e) Einen der Neigungswinkel erhält man aus dem Aufriss, den andern durch Umklappen eines Achsschnittes in den Grundriss der Pyramide.



### **Lösungshinweise zu Aufgabe 2:**

- a) Der Begriff des Flächeninhalts ist nicht vorhanden bzw. nicht genügend vom Begriff des Umfangs abgesetzt (fehlende Begriffsdiskrimination). Gründe dafür können sein: mangelnde Messprozesse, keine Flächen- sondern immer nur Linienfiguren, fehlende Alltagserfahrungen zum Flächeninhalt, Nichtunterscheidung von Repräsentant (Flächenstück als Figur) und Größe (Flächeninhalt).

Schüler können an der algebraischen Form der Formeln nicht erkennen, ob die Formeln nur Längen in erster Potenz oder Produkte von Längen enthalten. Allein schon damit könnte man die Inhalts- von den Umfangsformeln trennen.

Es fehlen plausible und jederzeit reproduzierbare einfache Abschätzungen, mit deren Hilfe die Schülerinnen und Schüler leicht zu den richtigen Formeln kommen können.

Die Schüler befassen sich gar nicht mit dem Inhalt der betreffenden Aufgabenstellung, sondern handeln diese nach einem eingebläuten Muster blind ab.

- b) Maßnahmen:

Den Flächeninhaltsbegriff gut fundieren und gegen Länge und Volumen deutlich absetzen (Messprozesse, Abschätzungen machen, Größenvorstellung schulen, Einheitensystem kennen, Standardrepräsentanten absichern, ...).

Weitgehender Verzicht auf Formeln und stattdessen Näherungen, Abschätzungen, Messprozesse (auch nur gedachte) sowie plausible Strategien für die betreffende Problemstellung einsetzen. Damit erzwingt man eine inhaltliche Befassung mit der Problemstellung und verhindert rein formale blinde Abarbeitung.

Schüler müssen jeden Schritt ihrer Lösung kurz erklären, begründen und beschreiben.

Bei jeder Aufgabe beschreibt der Schüler zuerst was er zu messen hat, mit welchem Messgerät er dies zu machen gedenkt und welche Einheit er zum Messen verwenden will. Eine Rechnung ohne diese Schritte wird nicht bewertet. Dagegen werden die genannten Teilschritte hoch bewertet, auch wenn das rechnerische Ergebnis fehlt oder fehlerhaft ist.

- c) Inhalt: Die Aufgabe thematisiert alle wesentlichen geometrischen Größen am Kreis: Inhalt, Umfang, und benötigt Radius bzw. Durchmesser. Sie lässt kein blindes formales Operieren zu, weil keine Fachtermini verwendet werden, sondern Einkleidungen und weil nicht einfach die fertigen Kreisformeln verwendet werden können, sondern Kreisteile zusammensetzen sind. Man muss sich in die Figur hineindenken, um z.B. ihren Umfang bestimmen zu können. Man muss den Text sorgfältig lesen, um die Situation zu verstehen.

Der Überschlag (mit Begründung) erfordert noch einmal die Bewusstmachung der entscheidenden Zusammenhänge:  $u \approx 3 \cdot d$  und  $A \approx \frac{3}{4} \cdot A_{\text{Umquadrat}} = \frac{3}{4} \cdot d^2$ .

Musterlösung:

Überschlag (am besten mit einer Freihandskizze dazu):

Halbkreisinhalt 30 m<sup>2</sup>. Kreisinhalt 60 m<sup>2</sup>.

Inhalt des Umquadrats 80 m<sup>2</sup>. Durchmesser =  $\sqrt{80}$  m  $\approx$  9 m.

Damit Beetumfang = 9 m + 1,5 \* 9 m = 23 m.

Damit benötigt man ca. 4 \* 23  $\approx$  100 Pflanzen.

Berechnung:

Kreisinhalt = A =  $\pi * r^2 = 60$  m<sup>2</sup>. Daraus r = 4,37...m.

Beetumfang = 2 \* r +  $\pi * r = 22,4697559$ ...m.

Anzahl der benötigten Pflanzen: 22,46975... : 0,25 = 89,8...  $\approx$  90.

Man wird auf alle Fälle zwei Pflanzen in die Ecken des Halbkreises setzen.

Dann benötigt man auf dem Durchmesser noch 34 (= 2 \* r / 0,25) Pflanzen.

Auf dem Halbkreisbogen dagegen noch 54 (=  $\pi * r / 0,25$ ) Pflanzen.

Man benötigt daher 90 Pflanzen.

=====

Einschub und Ergänzung: Mögliche Testaufgaben nach der Behandlung des Kreises:

- 1) Welche der folgenden Formeln kann auf keinen Fall die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises sein?

$$A_1 = r + r + \pi$$

$$A_2 = 2 * r * \pi$$

$$A_3 = 2 * \pi * r * r$$

$$A_4 = r * d * \pi$$

$$A_5 = \pi * r * 2$$

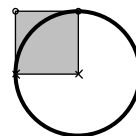
$$A_6 = 2 * d * \pi$$

$$A_7 = \frac{\pi}{2} * d * r$$

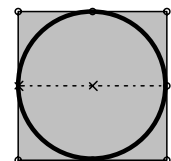
$$A_8 = \frac{\pi}{4} * d^2$$

- 2) Analoges für Umfangsformeln.

- 3) Auf der grauen Fläche ist 4 m<sup>2</sup> Platz.  
Wie lang ist etwa die Schnur (dicke Linie)?



- 4) Die dicke Kreislinie ist etwa 12 m lang.  
Wie viel Platz ist auf dem Quadrat?



- 5) Die Aufgaben 3 und 4 können nun variiert werden, indem anfangs die Kreisfläche statt der Quadratfläche bzw. der Quadratumfang statt dem Kreisumfang ins Spiel gebracht wird.
- 6) Ein halbkreisförmiger Sandkasten soll Platz für 24 spielende Kinder bieten. Jedes Kind benötigt etwa 1 m<sup>2</sup> Spielfläche im Sandkasten. Bestimme durch einen Überschlag, wie viel Meter Randstein zur Einfassung des Sandkastens erforderlich ist. Beschreibe und begründe dein Vorgehen.

### **Lösungshinweise zu Aufgabe 3:** (Siehe Skript „Trigonometrie“)

Man geht analog zu der im Skript angegebenen Art und Weise vor, indem man nicht die Steigung, sondern das Verhältnis „Höhenunterschied zu gefahrene Strecke“ (z. B. mit dem Begriff „Steiganteil“ im Unterschied zur „Steigung“ beim Tangens) ins Spiel bringt. Die weitere Stufenfolge zur Erarbeitung der Sinusfunktion folgt dann genau dem dort angegebenen Weg:

- a) Zeichnerische Ermittlung von Tabellenwerten in beiden Richtungen (Winkel  $\leftrightarrow$  Steiganteil) für Winkel von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$ . Ziel: Inhaltliche Bedeutung festigen. Schüler muss Zuordnungscharakter erfahren bzw. erarbeiten: „Zu jedem ... gib es eindeutig...“
- b) Zeichnen eines Funktionsschaubilds unter Verwendung dieser Tabellenwerte. Ziel: Erkennen des Funktionscharakters und Überblick über den Verlauf der Zuordnung Winkel  $\rightarrow$  Steiganteil im Bereich von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$ .
- c) Bestimmung der Werte für besondere Winkel ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ) und für die Randwerte  $0^\circ$  und  $90^\circ$  durch „Extrapolation“. Ziel: Vernetzen mit Bekanntem.
- d) Benennung der Funktion mit ihrem Namen Sinus.
- e) Ableseübungen in beiden Richtungen vom Taschenrechner. Ziel: Umgang mit der Funktion und Bestimmung beliebiger Funktionswerte.
- f) Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken mit Hilfe der Sinusfunktion. Ziel: Verankerung, Einordnung und Sicherung des neuen Begriffs durch Anwendungen.

Anschließend behandelt man in ganz analoger Weise (Wiederholung, Festigung, erneutes Durchdenken der wesentlichen Schritte) die Kosinusfunktion (man könnte ihr zunächst analog zum „Steiganteil“ beim Sinus z. B. einen Namen wie „Vortrieb“ oder ähnliches geben). Ziel: Festigung durch Wiederholung.

Nun wird der Zusammenhang von Sinus und Kosinus diskutiert und behandelt.

Eventuell kann schon hier auf beliebige Winkel verallgemeinert werden (Winkelfunktionen am Einheitskreis).

Da in den neueren Lehrplänen weder der Sinus- noch der Kosinussatz vorgesehen sind, erübrigt sich die Behandlung des stumpfwinkligen Dreiecks als Zwischenstufe vor der Verallgemeinerung am Einheitskreis.

Schließlich wird die Tangensfunktion zunächst nochmals als „Steigung“ im Bereich von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  und schließlich als Quotient von Sinus und Kosinus am Einheitskreis behandelt.

Die trigonometrischen Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$  und  $\tan$  werden im Zusammenhang am Einheitskreis als periodische Funktionen dargestellt und der Übergang vom Schaubild für  $y = \sin x$  zu dem von  $y = a \cdot \sin x$ , sodann zu  $y = \sin(x + \varphi)$  und schließlich zu dem von  $y = a \cdot \sin(x + \varphi) + b$  beschrieben.

[Dabei Wiederholung der Kenntnisse über die Quadratformel  $y = a \cdot (x + b)^2 + c$ ].