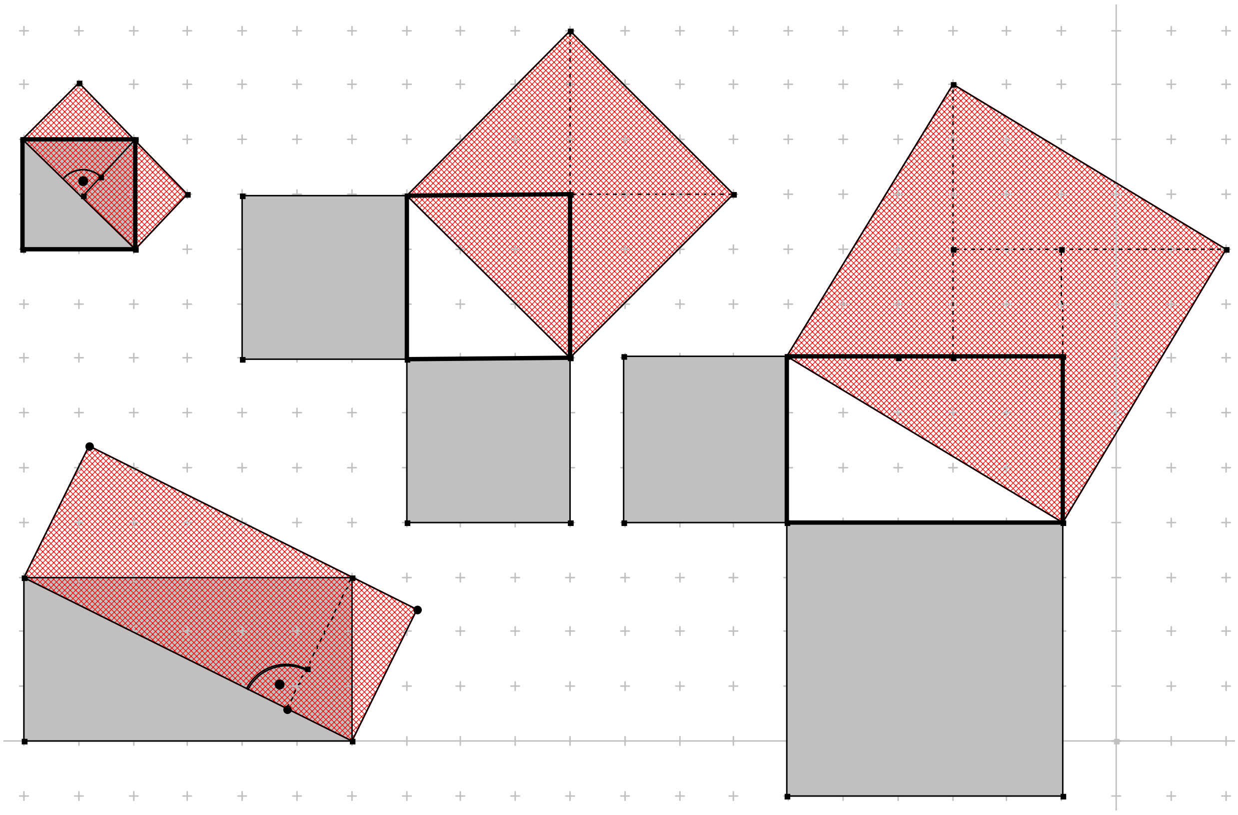
I. Zugänge zum Satz des Pythagoras in der Schule

0. Vorübungen: Inhaltsgleiche Flächenstücke

Warum sind die folgenden Flächenstücke (rot schraffiert bzw. grau) jeweils gleichgroß?

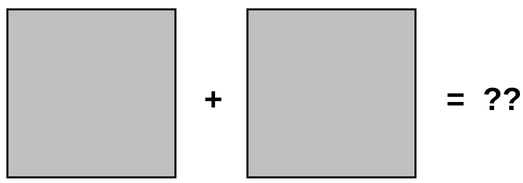


Vorübungen dieser Art, eröffnen Schülern den Blick für gleichgroße Flächenstücke (und zwar ohne diese berechnen zu müssen!) und bereiten so den Boden für die Problemstellung und Aussage der Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck.

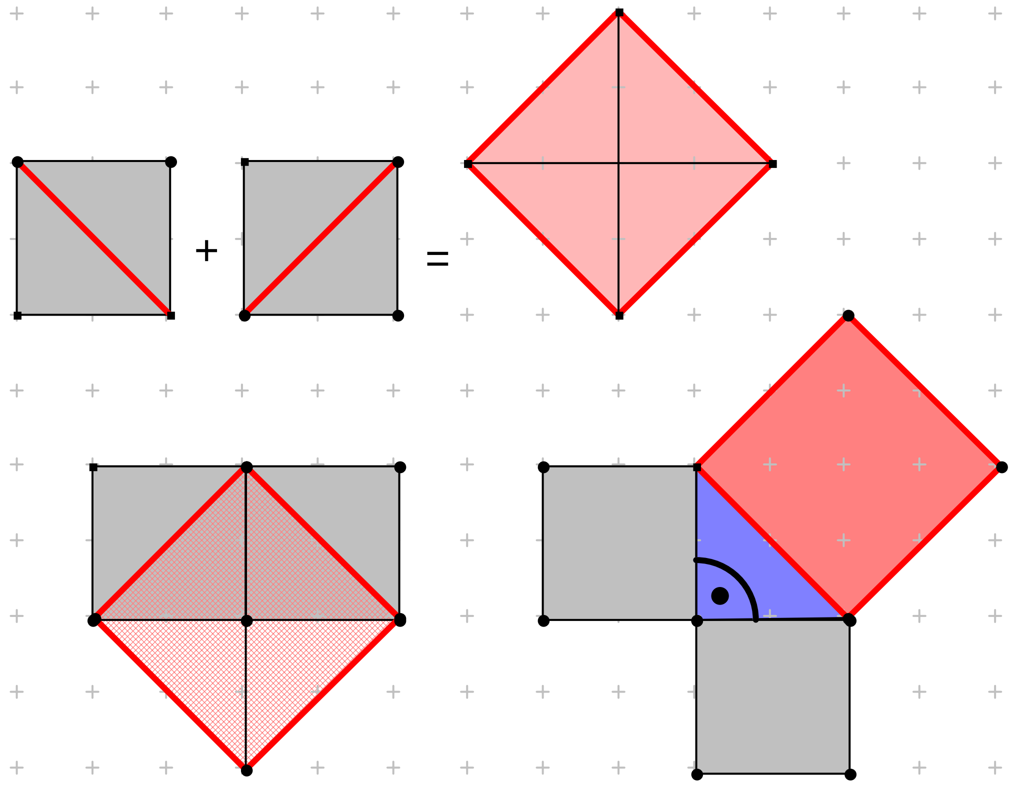
Man kann verschiedene Argumentationen für die Gleichheit der obigen Flächenstücke ins Feld führen: Zerlegungen, Ergänzungen, Ausmessen im vorgegebenen Quadratraster, Umformungen etc. All diese Strategien werden anschließend nützlich sein.

1. Experimenteller Zugang (Quadratverdopplung)

Gegeben sind zwei kongruente Quadrate.



Wie kann man aus diesen beiden gleichgroßen Quadraten ein einziges Quadrat herstellen, das den gleichen Flächeninhalt hat, wie die beiden gegebenen Quadrate zusammen? Schere!



Man wird das Ergebnis – auf das die Schüler in aller Regel leicht selber kommen - in verschiedenen Versionen formulieren und eine einfache anschauliche Begründung durch Betrachtung eines passenden Quadratrasters wie oben dargestellt geben (anschaulicher Beweis des Sonderfalls).

Ergebnis:

Zeichnet man über der Diagonale eines Quadrats ein neues Quadrat, dann hat dieses den doppelten Flächeninhalt des Ausgangsquadrats.

$$d^2 = 2 * a^2 \qquad\qquad d = a * \sqrt{2} = 1{,}414\ldots * a$$

Die Quadratdiagonale ist $\sqrt{2}$-mal so lang wie die Quadratseite.

Die Quadratseite ist das $\frac{\sqrt{2}}{2}$-fache bzw. das 0,707…-fache der Quadratdiagonale.

Dieses erste Ergebnis wird man zunächst auf die Fälle anwenden, bei denen es um den Zusammenhang der Quadratseite und ihrer Diagonale geht, um den Schülern den *Blick für gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke* (Geodreiecke, halbe Quadrate) zu schärfen. U.a. ist die Länge des DIN-Formates immer $\sqrt{2}$-mal so lang wie die Breite. Man zeige dies durch Falten eines DIN-A4-Blattes.

Schließlich formuliert man das Ergebnis als **Dreieckssatz für rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke:**

Im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck hat das Quadrat über der Hypotenuse (dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite) denselben Flächeninhalt, wie die beiden Kathetenquadrate zusammen.

2. Übergang zum beliebigen rechtwinkligen Dreieck

Im nächsten Schritt versucht man zu ***verallgemeinern*** bzw. zu ***problematisieren***:

Fragestellung:

Woran liegt diese besondere Eigenschaft des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks, liegt es am rechten Winkel oder liegt es an der Gleichschenkligkeit?

Dies ist eine interessante Fragestellung, in die man die Schüler einbinden kann. Es empfiehlt sich, eine Erwartungshaltung aufzubauen, indem man durch Abstimmung eine Meinungserkundung erhebt und die Schüler vermuten und abstimmen lässt;

- Welche Fälle sind denkbar?
- Was müssen wir alles untersuchen für eine vollständige Antwort auf unsere Frage?

Angemessen ist nun ***arbeitsteiliger Gruppenunterricht***: Man benötigt mindestens die drei folgenden Gruppen (die vierte Gruppe „rw und glsch" ist ja schon erledigt s.o.):

- rechtwinklige, aber nicht gleichschenklige Dreiecke
- gleichschenklige, aber nicht rechtwinklige Dreiecke
- weder gleichschenklige noch rechtwinklige Dreiecke

Das Ergebnis dieser Schülertätigkeit ist die ***Vermutung des folgenden Satzes***:

In allen <u>rechtwinkligen</u> Dreiecken hat das Hypotenusenquadrat genau denselben Flächeninhalt wie die beiden Kathetenquadrate zusammen.

Bevor man das Beweisbedürfnis wirklich weckt, wird man die Tragweite dieser Erkenntnis an einigen einfachen Beispielen zeigen:

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seitenlängen kennt, kann man damit die dritte berechnen.

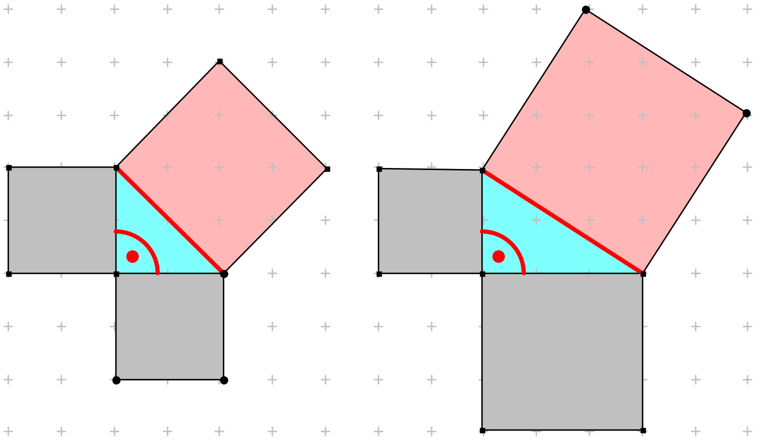
Beispiele:

Berechnung von Diagonalen in Rechtecken, Berechnung von Leiterlängen, schiefen Ebenen, Flächen- und Körperdiagonalen; Höhe im gleichseitigen Dreieck, etc. pp.

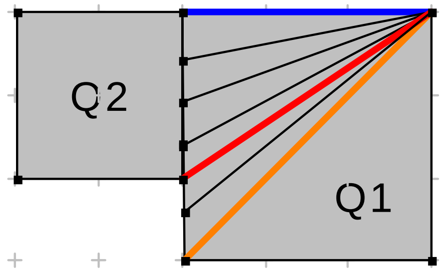
Eine andere Leitlinie als Zugang zum Satz des Pythagoras führt über die Quadratzusammensetzung: Haben wir eingangs *zwei gleichgroße* Quadrate zu einem einzigen zusammengesetzt, so wollen wir nun **zwei verschieden große Quadrate zu einem zusammensetzen**:

Im ersten Bild rechts ist nochmals der Fall der gleichgroßen Quadrate aufgezeichnet.

Warum soll dies nicht auch bei verschieden großen Quadraten ganz analog gehen, also wie im zweiten Bild?



Schließlich erlaubt das nebenstehende Bild noch eine detailliertere Argumentation:



Für ein Quadrat, das aus den beiden grauen Q_1 und Q_2 zusammengesetzt ist, ist die blaue Seite zu kurz, denn sie ergibt nur die Fläche des großen Quadrats Q_1. Dagegen ist die braune Seite zu lang, denn sie ergibt die doppelte Fläche des großen Quadrats Q_1 (vergleiche unter 1.).
Die gesuchte Quadratseite muss also in der Länge zwischen der blauen und der braunen Strecke liegen, also eine der möglichen angedeuteten Strecken sein. Warum nicht gerade die, die am Eckpunkt des kleinen Quadrats Q_2 endet?

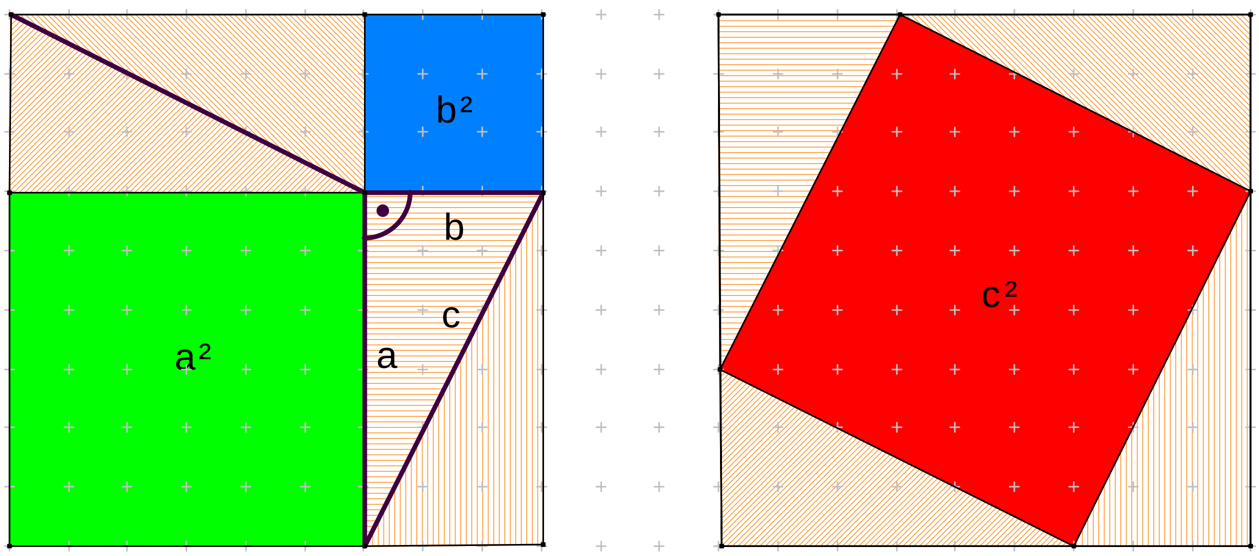
Auf beiden aufgezeigten Wegen gelangt man so auf natürliche Weise und für Schüler nachvollziehbar zur *Vermutung* des Satzes von Pythagoras.

Man wird, nicht zuletzt auch um das Beweisbedürfnis erst zu wecken, mit der noch unbewiesenen Vermutung arbeiten, um ihre Tragweite in Anwendungen zu erfahren. Erst danach könnte eine Reflexionsphase einsetzen, die zum Beweis führt.

3. Beweise für den Satz des Pythagoras

Erst nachdem man einen Eindruck von der Bedeutsamkeit dieser Erkenntnis in Anwendungen gewonnen hat, wird man das Beweisbedürfnis wecken. Man erinnert daran, dass man das Ergebnis nur ungefähr (z.T. mit deutlichen Fehlern wegen der ungenauen Zeichnungen der Schüler) und nur an wenigen Beispielen gefunden hat. Gilt dies wirklich *für alle rechtwinkligen Dreiecke*?

Eine Figur, die an den Sonderfall des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks anschließt, tut gute Dienste. Sie kann durch einfaches Ergänzen zu einer Legefigur für den sogenannten ***„altindischen Beweis“*** vervollständigt werden (von Schülern ausschneiden, legen und aufzeichnen lassen).



Man wird die Schüler – jeder mit anderen Maßen – ein Legespiel dieser Art ausschneiden lassen und damit den Satz des Pythagoras beweisen:

Man nimmt in der linken Figur die beiden kleinen Quadrate heraus. Dann ist die freibleibende Fläche von der Größe $a^2 + b^2$.

Nun ordnet man die verbliebenen vier Dreiecke im großen Rahmenquadrat neu an (allein durch Verschieben, ohne zu drehen!) und erhält als freibleibende Fläche ein Quadrat der Größe c^2. Da man weder was dazugetan noch weggenommen hat, sondern nur die Dreiecke umgeordnet, müssen die freibleibenden Flächen beide Male gleich groß sein (Ergänzungsgleichheit):

Es gilt also: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$.

Warnung:

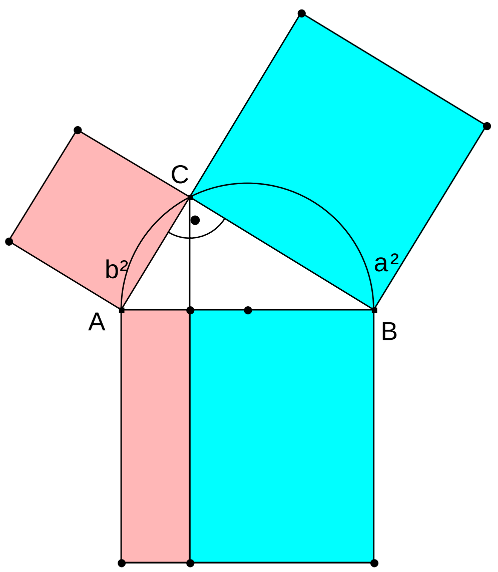
Man lasse den Satz des Pythagoras stets inhaltlich formulieren und verlange dies auch von den Schülern – notfalls ergänzt durch eine Skizze. Man hüte sich vor dem – bei Schülern sehr beliebten – blinden Formelreproduzieren. Der Satz des Pythagoras heißt eben

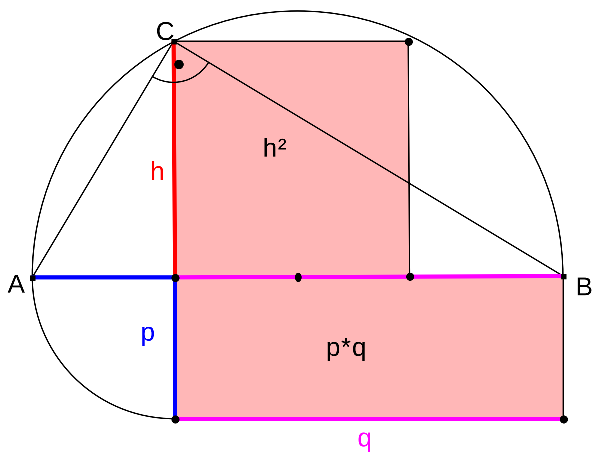
- **nicht** „$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$"
- **sondern: Im rechtwinkligen Dreieck hat das Hypotenusenquadrat denselben Flächeninhalt wie die beiden Kathetenquadrate zusammen.**

4. Höhensatz und Kathetensatz

In der Regel reicht der Satz des Pythagoras für die Anwendungen aus (Berechnung der dritten Seite eines rechtwinkligen Dreiecks). Für die Umwandlung eines Rechtecks in ein inhaltsgleiches Quadrat jedoch sind der Höhensatz bzw. der Kathetensatz notwendig.

Die folgenden Figuren geben Anlass zur Vermutung dieser beiden Sätze:





Bewegt man C auf dem Thaleskreis, so verändern sich die gleichfarbigen Flächenstücke in gleicher Weise. Man vermutet daher, dass sie inhaltsgleich sind.

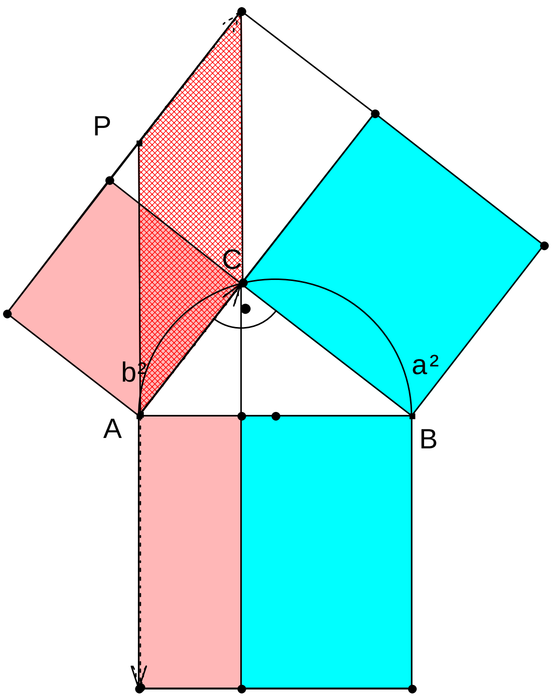
Wir geben im Folgenden je eine Beweisfigur zum Kathetensatz (einschließlich Pythagoras) und zum Höhensatz unter Verwendung von Scherungen (Beweis durch Abbildungen).

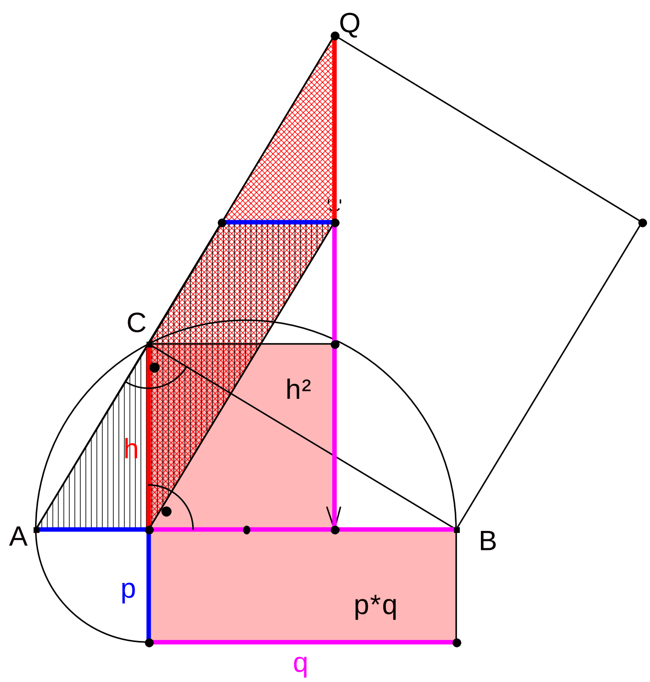
Kathetensatz:

Man schert das Kathetenquadrat über b (P lässt sich in der zugehörigen geo-Datei ziehen) in die schraffierte Lage. Durch Verschiebung (P→A) und weitere Scherung geht es in das Rechteck aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt über. Analog verfährt man für das Kathetenquadrat über der zweiten Kathete. Zusammengenommen erhält man damit erneut einen Beweis für den Satz des Pythagoras.

Höhensatz:

Man schert das Höhenquadrat (Q lässt sich in der geo-Datei wieder bewegen), so dass eine Seite die Länge a= CD = BC erreicht (hier eingezeichnete Lage von Q). Nun schert man in das mit senkrechten schwarzen Linien schraffierte Parallelogramm, das p als Grundseite und q als Höhe hat, also genau zum Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten inhaltsgleich ist.





Die Bedeutung dieser beiden Sätze liegt darin, dass man mit ihrer Hilfe jedes Rechteck quadrieren, d.h. durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandeln kann. Da man jedes Vieleck durch „Eckenabscheren“ in ein inhaltsgleiches Dreieck und dieses leicht in ein inhaltsgleiches Rechteck verwandeln kann, lässt sich damit jedes beliebige Vieleck mit Hilfe eines dieser Sätze „quadrieren“.

Außer den genannten Beweistypen durch Ergänzen bzw. durch Abbildungen, gibt es Beweistypen durch Zerlegen (z. B. Perigal) oder rechnerische Beweise.

II. Zugänge zum Satz des Thales in der Schule

Experimentelle Zugänge:

1. a) Baue aus zwei gleich langen Stäben, die in der Mitte drehbar verbunden sind, ein Diagonalenkreuz eines Vierecks. Spanne eine Gummischnur um die Enden der Stäbe. Welche Formen von Vierecken kann man auf diese Weise erzeugen?
   b) Auf welcher Kurve bewegt sich eine Ecke, wenn man eine Diagonale festhält und die andere dreht?
   c) Welche Eigenschaft haben die Diagonalen eines Rechtecks?
   d) Wie kann man allein mit Schnüren und Fluchtstäben einen rechten Winkel abstecken?

2. Stecke zwei Reißzwecken an den Punkten A und B von unten durch ein Blatt Papier. Schiebe nun den rechten Winkel eines Geo-Dreiecks ein, so dass die Katheten an den beiden Reißzwecken anliegen. Auf welcher Bahn bewegt sich der Scheitel des rechten Winkels, wenn man das Geo-Dreieck bewegt? Welche Vermutung ergibt sich hieraus?

Zeichnerische Zugänge

3. Gegeben ist eine Strecke AB. Trage an AB in A den Winkel 30° und in B den Winkel 60° an. Wie groß wird der Winkel bei D im Dreieck ABC? Zeichne weitere rechtwinklige Dreiecke auf diese Weise. Wo liegen alle Ecken C?

4. Zeichne ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck. Wo liegt seine Umkreismitte? Zeichne. Wie weit ist diese von allen drei Ecken entfernt?
   Woran liegt die Besonderheit dieses Falles, am rechten Winkel oder an der Gleichschenkligkeit? Erforsche dies und beantworte die Frage. Was stellst du fest?

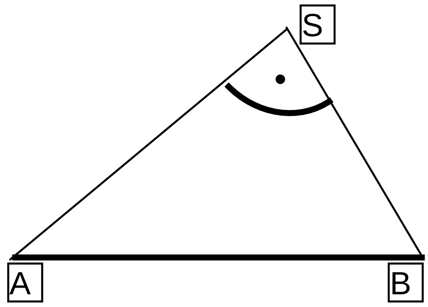
5. Gegeben ist ein Kreis k und ein Durchmesser AB von k. Verbinde einen beliebigen Kreispunkt C mit A und B. Welche Dreiecksform entsteht? Besonderheiten?

6. ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck (AC = BC). Verlängere AC über C hinaus um sich selbst bis D (oder spiegle A an C nach D).
   a) Wo liegt die Umkreismitte von Dreieck ABD?
   b) Wie groß ist der Winkel ABD?

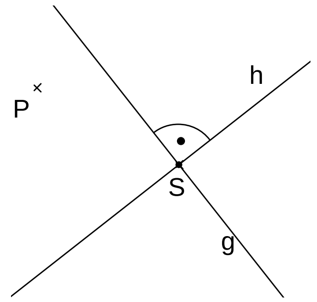
7. a) Zeichne Rechtecke in einen Kreis, so dass die Ecken auf der Kreislinie liegen. Zerlege die Rechtecke durch Diagonalen in zwei rechtwinklige Dreiecke.
   b) Zeichne ein Rechteck mit Diagonale AC. Zeichne weitere Rechtecke, die ebenfalls AC als Diagonale haben. Wo liegen die weiteren Ecken aller dieser Rechtecke?

Problemorientierter Zugang

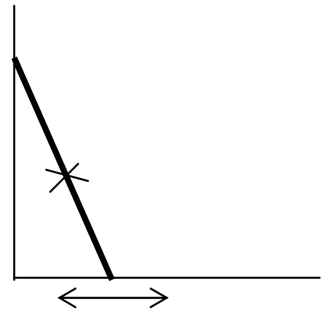
8. AB ist die Front eines schönen Fachwerkhauses. Dieses soll mit einem Scheinwerfer, dessen Lichtkegel eine Öffnung von 90° hat, voll beleuchtet werden. Wo muss bzw. kann der Scheinwerfer aufgestellt werden?



Abbildungsgeometrischer Zugang:



9. Gegeben sind zwei zueinander senkrechte Geraden g und h mit Schnittpunkt S sowie ein Punkt P.
   a) Spiegle P an g nach Q und Q an h nach R.
   b) Untersuche Dreieck PQR auf Besonderheiten.
   c) Wie liegt S bezüglich P, Q und R?
   d) Begründe, dass der Winkel $\angle(PQR) = 180°$ beträgt.
   e) Welche Rolle spielen g, h und S im Dreieck PQR?
   f) Kann man die Reihenfolge der Spiegelungen vertauschen?



10. Auf dem waagrechten Boden steht eine Leiter an einer senkrechten Wand. Die Leiter rutscht weg. Welche Kurve beschreibt der Mittelpunkt der Leiter?

Bemerkungen:

1. Die Zugänge sind von verschiedener Schwierigkeit und verschiedenem Abstraktionsgrad. Sie geben vielfältige Differenzierungsmöglichkeiten für mögliche Vertiefungen oder Vereinfachungen zur Behandlung des Problemkreises Thalessatz.

2. Die Aufgabenstellungen sind hier z.T. nur knapp gefasst. Sie lassen sich in vielen Fällen zu weiteren fruchtbaren Fragestellungen erweitern. Überlegen Sie sich solche Möglichkeiten.

3. Man versuche, die Erkenntnisse, die man aus der Bearbeitung der Aufgaben gewonnen hat, in wesentlichen Aussagen (Sätzen) zusammenzufassen. Es gibt dafür durchaus mehrere Möglichkeiten:

- Der Peripheriewinkel (Umfangswinkel) über einem Kreisdurchmesser misst 90°. (Der Winkel im Halbkreis ist ein Rechter).
- Die Umkreismitte eines rechtwinkligen Dreiecks ist stets die Hypotenusenmitte.
- Alle Punkte, von denen aus man eine Strecke AB unter einem Winkel von 90° sieht, liegen auf dem Kreis mit AB als Durchmesser.

4. Welche der Zugänge lassen sich verallgemeinern für beliebige Winkel an Stelle von rechten Winkeln?

5. Welche der Zugänge legen Begründungen (Beweise) nahe?
   Wie kann man jeweils begründen?

Kontrollaufgaben:

1. Gegeben ist eine Strecke AB. In welchem Gebiet kann man einen Punkt C wählen, so dass das Dreieck ABC
   a) spitzwinklig b) rechtwinklig c) stumpfwinklig wird?
   Färben Sie die entsprechenden Gebiete der Ebene mit verschiedenen Farben.

2. Wie kann man im Gelände allein mit Hilfe einer Schnur und Fluchtstäben zum Markieren von Punkten einen rechten Winkel abstecken?