

Zur Behandlung der Rauminhalte in den Klassen 5 bis 10.

1. Grundsätzliche Bemerkungen

Die Behandlung der verschiedenen **Körper** in der Schule (Würfel, Quader, Säulen, Spitzkörper, Kugeln und evtl. Stümpfe) darf sich nicht allein auf die *Berechnung* von Oberflächengröße und Rauminhalt beschränken. Mindestens ebenso wichtig ist die Kenntnis von Symmetrieeen der Körper (warum kann ein Zylinder sowohl als Achse als auch für die Rohrpost verwendet werden?), von Formelementen (Ecken, Kanten, Flächen und deren Zusammenspiel) u. dgl. mehr. Man nennt das „Formerkundung“.

Kurz gesagt: Wer z.B. die Pyramide in der Schule behandelt und nicht jeden Schüler zumindest ein reales Modell bauen lässt, hat seinen Beruf als Mathematiklehrer verfehlt!

Mathematik ist mehr als Rechnen!

Wichtige Aktivitäten an Körpern sind neben dem Bau von Kanten-, Flächen- und Vollmodellen auch das Zeichnen und Skizzieren von Ansichten, Schrägbildern, Teilflächen etc. Sie wirken begriffsbildend und vermitteln unmittelbare Einsichten in die Geometrie.

Aufgabe 1:

Welche Art von Modellen von Quadern sollten Schüler selbst basteln? Bauen Sie diese. Welche Erkenntnisse sollten sie jeweils mit welchem Modell erarbeiten?

Aufgabe 2:

Was kann man am Kantenmodell eines Quaders, was am Oberflächenmodell (Netz) und was am Vollmodell besonders deutlich zeigen und erarbeiten?

Aufgabe 3:

Wozu kann das „Schnurkantenmodell“ eines Quaders dienen?

(Zwei kongruente Rechtecke z.B. aus Pappe oder Sperrholz werden aufeinandergelegt. An den vier Ecken werden Löcher gebohrt und dünne Fäden durchgezogen. Nun wird die oben liegende Deckfläche senkrecht nach oben von der unteren weggezogen, wobei die Seitenkanten als gespannte Fäden aufgezogen werden).

Aufgabe 4:

Welche Sonderformen von Quadern sind möglich? Bauen Sie diese Formen.

Entwerfen Sie ein Hassediagramm der Quaderfamilie.

Welche Verallgemeinerungen sind möglich?

Vergleichen Sie mit den Verhältnissen in der Ebene und dem Rechteck als Ausgangsfigur.

2. Quader in Klasse 5

In Klasse 5 geht es neben der **Einführung des Größenbegriffs Volumen** (Rauminhalt) am Beispiel der Quader (siehe auch das Skript zu „Größen“) vor allem um *den Aufbau geeigneter Vorstellungen* von diesem Begriff. Dazu muss er zumindest von zwei anderen Größenbegriffen sauber abgetrennt werden (Begriffsdiskrimination), vom Begriff des **Gewichts** (im Sinne der Masse) und vom Begriff der **Oberflächengröße** (Flächeninhalt der Körperoberfläche).

Die beste Methode um einen Größenbegriff zu festigen ist, **Messprozesse** durchführen zu lassen. Dies geht in Klasse 5 am besten durch Nachbau geeigneter Körper – u.U. auch nur näherungsweise – mit Hilfe von Steckwürfeln. Es ist absolut unnötig, eine Formel zur

Berechnung des Quadervolumens zu entwickeln. Die Schüler kommen bei hinreichender Zahl von Aufgabenstellungen zum „Ausmessen“ von selbst auf die Strategie „*Einzelwürfel – Würfelreihe – Würfelschicht – Schichtenzahl*“ und so zur Entwicklung von Berechnungsstrategien für das Ausmessen von Quadern:

V = Zahl der Messwürfel in einer Schicht mal Anzahl der Schichten.

Da in dieser Klasse alle Werte ganzzahlig sind, erübrigt sich eine Formel, sie sollte ausdrücklich *nicht* behandelt werden, die Schüler kommen von selbst auf die Strategie.

Aufgabe 5:

Geben Sie Aktivitäten (Aufgabenbeispiele) an, durch die sich Schüler den Unterschied von *Rauminhalt und Gewicht* (eigentlich Masse) erarbeiten können.

Aufgabe 6:

Geben Sie Aktivitäten an, durch die sich Schüler den Unterschied von *Rauminhalt und Oberflächengröße* (Flächeninhalt der Körperoberfläche) erarbeiten können.

3. Aufbau eines Systems von Standardrepräsentanten

Im Sinne des nachhaltigen Lernens ist mit die wichtigste Aufgabe in Klasse 5, eine *tragende Vorstellung von der Größe Rauminhalt* aufzubauen und für künftige Erweiterungen vorzubereiten. Dazu dient ein System von geeigneten Standardrepräsentanten: Um bei Schülern das Vermögen aufzubauen, Größenordnungen sinnvoll abschätzen zu können, müssen sie über einen *Grundstock von Vergleichsgrößen* verfügen, diesen Grundstock nennen wir das System der Standardrepräsentanten: Für jede Größenordnung des Größenbegriffs hat der Schüler einen oder mehrere gebräuchliche Gegenstände aus dem täglichen Leben parat, die diese Größenordnung darstellen (repräsentieren). So steht z.B. der Dezimeterwürfel (bzw. die Milchtüte) oder die Literflasche als Standardrepräsentant für die Größe 1 Liter = 1 dm³.

Aufgabe 7:

Ergänzen Sie die folgende Tabelle mit geeigneten Standardrepräsentanten für Volumina:

100 m ³	10 m ³	1 m ³	100 dm ³	10 dm ³	1 dm ³	100 cm ³	10 cm ³	1 cm ³
				Wasser-eimer; Waschmit-telpaket		Zehntel-oder Achtelglas		Finger-kuppe; Steckwür-fel

Wir halten es für unerlässlich, dass während der Behandlung der Rauminhalte entsprechende Repräsentanten für 1 cm³, 10 cm³, 100 cm³, 1 dm³, 10 dm³, möglichst auch noch 100 dm³ und 1 m³ sicht- und greifbar im Klassenzimmer verfügbar sind. Dies ist vor allem im Hinblick auf Umwandlungen benachbarter Maßeinheiten wichtig. 10 cm³ (Stange) sind noch lange nicht gleich 1 dm³, ja selbst 100 cm³ (Platte) sind noch kein Dezimeterwürfel. Das müssen Schüler sichtbar und greifbar vor Augen haben. Mit diesen Messwürfeln vor Augen können sie auch sinnvolle Abschätzungen treffen z.B. wie groß der Rauminhalt eines Schulranzens, eines Mäppchens, eines Atlas, des Pultes, des Schrankes, des Aquariums, des Klassenzimmers etc. ist. Geeignete Lehrmittel sind die Holzwürfel, -stangen, -platten und -blöcke der „Mehrsystemblöcke“ für das dezimale Stellenwertsystem. Wer ein Schuljahr lang diese Gegenstände täglich vor Augen hatte, wird keine Probleme beim Umrechnen von cm³ in dm³ oder umgekehrt haben!

4. Rauminhalte in Klasse 6

Mit Hilfe der Bruchrechnung werden nun auch Volumina von Quadern bestimmt, deren Seitenlängen nicht mehr ganzzahlig sind, sondern beliebige **rationale Seitenmaßzahlen** in Bruch- oder in Dezimalform. Analog zum Verfahren wie bei Rechtecken, gibt es im Prinzip zwei Möglichkeiten zur Volumenmessung von solchen Quadern:

Weg 1:

Unterteilung der Seiten des Einheitswürfels mit den Nennern der beteiligten Brüche und Ausmessen mit diesen neuen Einheitsquadern. Deren Inhalt kann auf Grund der Herstellungsweise bestimmt werden.

Beispiel: Quader mit den Kantenlängen $\frac{2}{3}$ dm , $\frac{7}{4}$ dm und $\frac{9}{5}$ dm.

Man teilt den Einheitswürfel 1 dm^3 längs einer Kante in 3, längs der zweiten in 4 und längs der dritten Kante in 5 gleiche Teile. Dadurch entstehen $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ gleich große Messquader, von denen jeder den Rauminhalt $\frac{1}{60} \text{ dm}^3$ hat. Mit diesen legt man nun den gegebenen Quader passend aus: 2 längs der ersten, 7 längs der zweiten und 9 längs der dritten Kante. Man benötigt $2 \cdot 7 \cdot 9 = 126$ Messquader zu je $\frac{1}{60} \text{ dm}^3$. Also beträgt der Rauminhalt des Quaders $\frac{126}{60} \text{ dm}^3$.

Aufgabe 8:

Zeichnen Sie eine Schrägbildskizze, die das Verfahren von Weg 1 am gegebenen Beispiel veranschaulicht.

Weg 2:

Wir wählen denselben Beispielquader wie oben.

Nun gehen wir aus vom Einheitswürfel mit 1 dm^3 . Im ersten Schritt „strecken“ (hier stauchen) wir die erste Kante mit dem Faktor $\frac{2}{3}$ und erhalten eine quadratische Säule mit 1 dm als Grundkante und $\frac{2}{3} \text{ dm}$ als Höhe der quadratischen Säule. Ihr Rauminhalt ist also $1 \text{ dm}^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ dm}^3$.

Im zweiten Schritt strecken wir diesen Körper mit dem Faktor $\frac{7}{4}$ längs der zweiten Kante und erhalten einen Quader mit dem Rauminhalt $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} \text{ dm}^3$.

Schließlich strecken wir noch die dritte Kante der Länge 1 dm mit dem Faktor $\frac{9}{5}$ und erhalten unseren gewünschten Quader mit dem Rauminhalt $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{9}{5} \text{ dm}^3$.

Aufgabe 9:

Zeichnen Sie eine Schrägbildskizze, die das Verfahren von Weg 2 am gegebenen Beispiel veranschaulicht.

Nach genügend häufiger Durchführung dieses Verfahrens entwickelt man die Strategie zur Quaderberechnung entsprechend dem Weg 2:

Quaderinhalt = Messwürfel * Längenmaßzahl * Breitenmaßzahl * Höhenmaßzahl.

Dass in dieser Strategie der Messwürfel auftaucht, ist hilfreich für die Klärung der Einheiten, die man verwendet. Beispiel: Welchen Rauminhalt hat ein Quader mit den Seitenlängen $23,5 \text{ dm}$, $0,725 \text{ m}$ und 215 mm ?

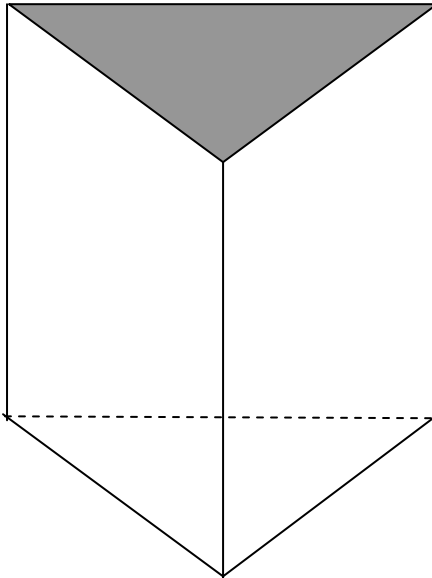
Grundsätzlich empfiehlt es sich, die **Oberflächengröße** auch von Quadern so bestimmen zu lassen, dass man ein Oberflächennetz skizziert (Skizze frei Hand gezeichnet) und jede Teilfläche einzeln berechnet – natürlich gleich große nur einmal – und schließlich alle zur gesamten Oberfläche addiert. Eine Vereinfachung ist die Zusammenfassung mehrerer Teilflächen zum „Mantel“ (Bsp. Haus). Dies Verfahren ist eine gute Vorbereitung für spätere Oberflächenberechnungen bei beliebigen Säulen und Spitzkörpern.

5. Säulen (Prismen) in Klasse 7 und 8

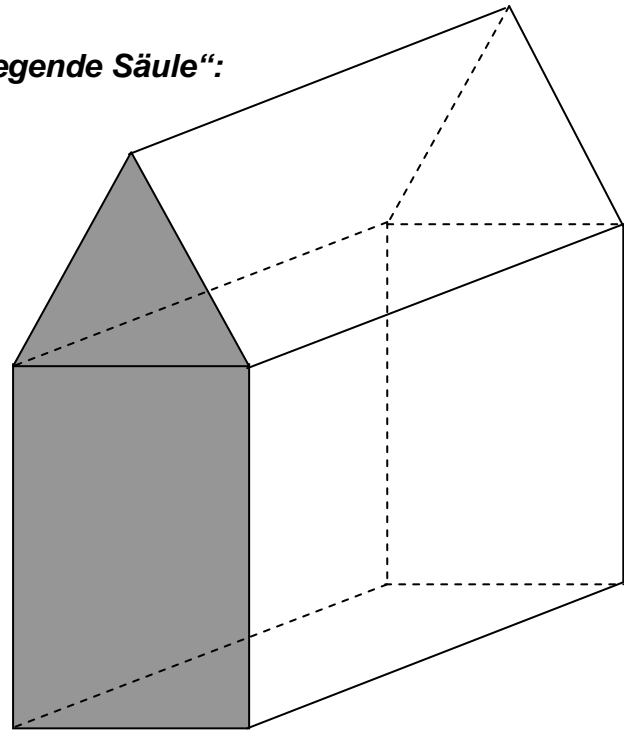
Ab Klasse 7, in der die *Flächenformen Dreieck und Viereck* behandelt werden, kann man auch gerade Säulen mit beliebigen Polygonen als Grundfläche behandeln. Die Erzeugungsweise (Schieben oder Schichten der Grundschicht) erfolgt auf gleiche Weise wie bei den Quadern. Man wird daher auch entsprechende Modelle bauen lassen: Schnurkantenmodelle, Schichtmodelle, Schiebemodelle.

Analog zu dieser Erzeugungsweise kann man nun Schrägbilder skizzieren: Man skizziert die Grundfläche. Durch Parallelverschiebung senkrecht dazu erhält man die Deckfläche und kann den Körper skizzieren. So können sowohl stehende als auch liegende Säulen skizziert werden:

Stehende Säule:



„Liegende Säule“:



Wesentlich für die Bestimmung des Rauminhalts von Säulen ist die Erkenntnis ihres **Aufbaus als Schicht- oder Schiebekörper**. Zur Gewinnung der Berechnungsstrategie lässt man zu verschiedenen Säulen mit Steckwürfeln eine Grundschicht aufbauen, die genau (oder annähernd z.B. bei Kreisen) die Grundfläche der Säule bedeckt. Der Rauminhalt der Grundschicht hängt eng mit dem Flächeninhalt der Grundfläche zusammen (wie?). Es passen nämlich genau so viele cm-Würfel auf die Grundschicht, wie viele cm² die Grundfläche misst (warum?). Nun kann durch Bestimmung der Anzahl der Schichten sofort das gesamte Volumen ermittelt werden:

Rauminhalt einer Säule = Volumen der Grundschicht mal Anzahl der Schichten.

Zur Bestimmung der **Oberflächengröße** von Säulen wird *das Netz mit Mantel sowie Grund- und Deckfläche* gezeichnet oder skizziert und diese Teile einzeln berechnet und schließlich addiert. Man benötigt daher nur die Formeln zur Berechnung von Flächengrößen. Dies Prinzip gilt für alle Säulen, z.B. auch für Zylinder.

Aufgabe 10:

Zeichnen Sie ein Haus im Grund-, Auf- und Seitenriss sowie im Schrägbild (Frontschau). Breite = 6 m; Länge = 12 m; Höhe bis zum Trauf = 5 m; Höhe des Dachstuhls = 4 m. Bestimmen Sie den Rauminhalt des Hauses, seine Dachfläche sowie die Giebelflächen.

6. Spitzkörper (Pyramiden und Kegel)

Auch bei der Behandlung der Spitzkörper sollte man der Grundkonzeption

Bauen – Beschreiben – Zeichnen – Berechnen folgen.

Geometrische Aktivitäten zur Formerkundung der Spitzkörper:

Kantenmodelle herstellen. Daran z.B. erkennen, dass drei verschiedene „Höhen“ auftreten: Kantenlänge sk der Seitenkanten, Seitenhöhen hs der Seitendreiecke und Raumhöhe hk des Körpers. Alle drei sind verschieden lang und zwar gilt stets:

$hk < hs < sk$. Man begründe diese Ungleichung am Modell.

Man wird neben Kantenmodellen auf alle Fälle noch *Flächenmodelle* basteln lassen und in diese zwei geeignete „Stützdreiecke“ einfügen: Das Stützdreieck für den Diagonalschnitt (mit Seitenkante und Körperhöhe) und das Stützdreieck für den Mittenschnitt (mit Seitenhöhe und Körperhöhe). Wichtig ist die Erkenntnis, dass diese Stützdreiecke alle rechtwinklig sind.

Aufgabe 11:

Bauen Sie ein Kantenmodell sowie ein Flächenmodell einer quadratischen Pyramide (Länge der Grundkanten = 15 cm; Länge der Seitenkanten = 20 cm).

Wie lang werden Seitenhöhe und Körperhöhe?

Kleben Sie an diesen Modellen in verschiedenen Farben die genannten Stützdreiecke an.

Selbstverständlich wird man auch *zeichnerische Darstellungen* dieser Körper entwerfen: Ansichten von vorn und von oben (Aufriss und Grundriss) sowie Schrägbildskizzen. Da diese nicht mehr ganz so einfach sind, wird man sie aus denen der „zugehörigen“ Säulen erzeugen: Man lässt die Deckfläche der Säule auf einen Punkt, die Spitze, zusammenschrumpfen.

Aufgabe 12:

Zeichnen Sie von einer quadratischen Pyramide mit Kantenlänge 10 cm den Grundriss, den Aufriss und ein Schrägbild. Wie lang werden Seitenhöhe und Körperhöhe?

Zeichnen Sie die „Stützdreiecke“ farbig ein und markieren Sie deren rechten Winkel.

Begründen Sie nun die obige Ungleichung $hk < hs < sk$.

Aufgabe 13:

Machen Sie dasselbe wie in der vorigen Aufgabe für ein regelmäßiges Tetraeder sowie für einen Kegel.

Aufgabe 14:

Zeichnen oder skizzieren Sie für die in Aufgaben 11 – 13 genannten Körper jeweils ein Oberflächennetz. Bestimmen Sie jeweils die gesamte Oberflächengröße der Körper.

Volumenbestimmung der Spitzkörper

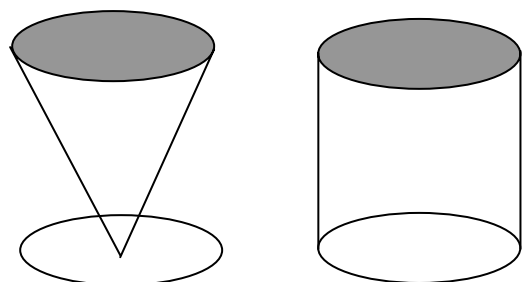
Wie kann man Schülern die Problemstellung „Volumenbestimmung von Spitzkörpern“ vermitteln? Geeignet sind reale Handlungen, z.B. das Umfüllen eines Sektkelches in ein zylindrisches Glas. Die Schüler sollen schätzen, wie hoch der volle Sektkelch – es muss ja nicht unbedingt Champagner sein! – das Becherglas füllt.

Der gefüllte Sektkelch wird in den Becher umgefüllt.

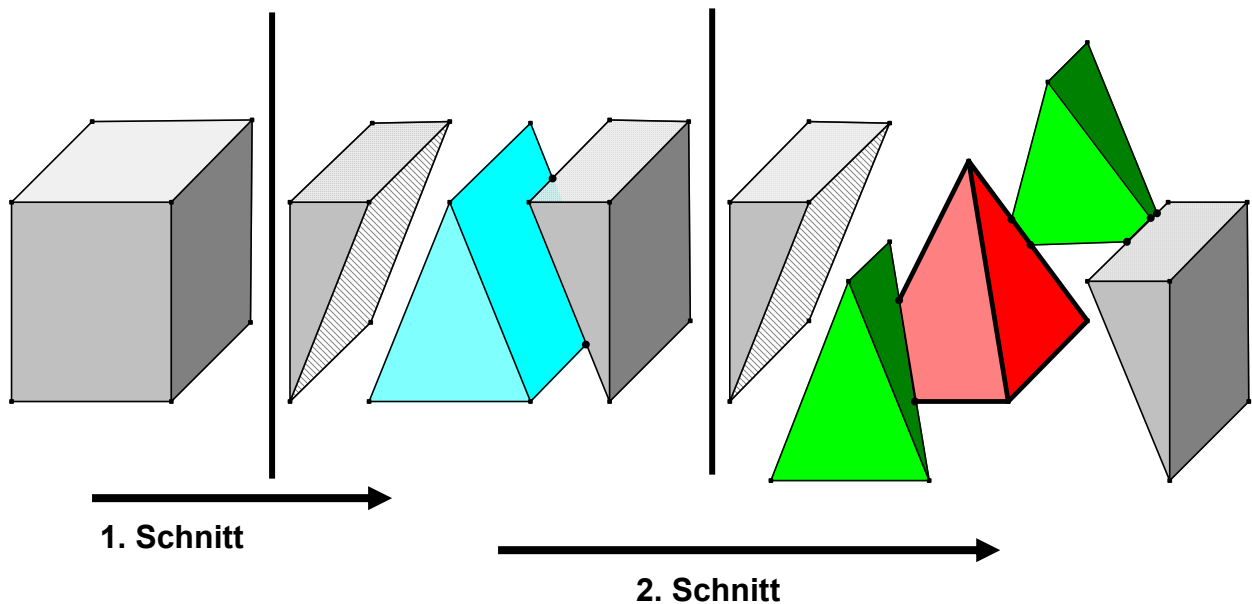
Wie hoch steht die Flüssigkeit danach im Becher?

Schätze zuerst. Mache dann die Probe.

Welche Abschätzung über den Rauminhalt des Kelches kann man damit gewinnen?



Eine zweite Problemstellung ist folgende: Man hat ein quaderförmiges Styroporstück. Aus diesem will man das Vollmodell einer Pyramide schneiden. Wieviel Abfall entsteht bzw. welchen Anteil am Quader macht die Pyramide aus? Auch hier wird man zuerst schätzen und danach den Versuch durchführen und die Schritte skizzieren:



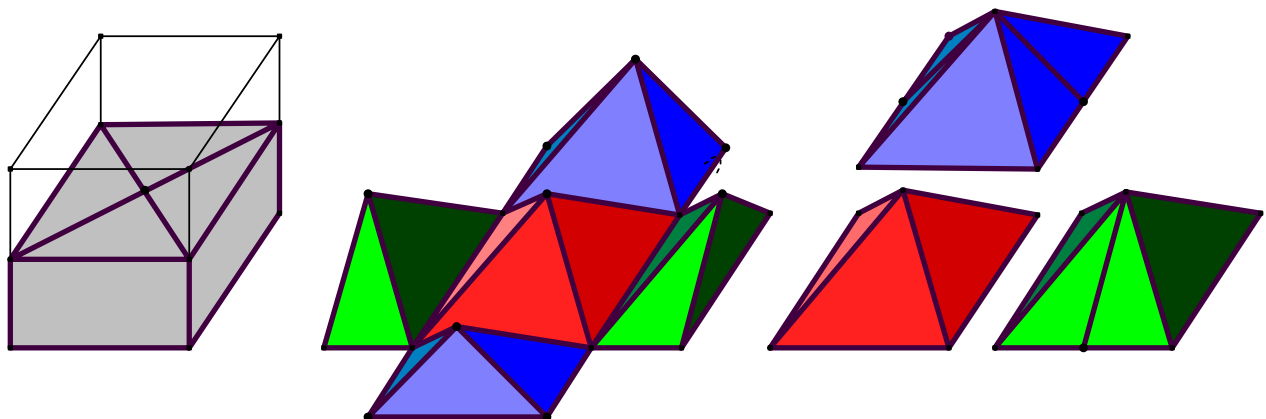
Man erkennt am 1. Schnitt, dass die rote Pyramide weniger als die Hälfte des Ausgangsquaders beträgt. Am zweiten Schnitt erkennt man, dass die rote Pyramide mehr ist als die beiden grünen Stücke zusammen, also mehr als ein Viertel des Quaders:

$$\frac{1}{4} * \text{Quadervolumen} < \text{Pyramidenvolumen} < \frac{1}{2} * \text{Quadervolumen}$$

Daher liegt es nahe anzunehmen, dass das Pyramidenvolumen $\frac{1}{3}$ des Quadervolumens beträgt. Dies bestätigt man durch Wiegen: Man legt auf eine Schale einer Waage die Pyramide und auf die andere eines der ersten (grau) und eines der zweiten (grün) Teilstücke und stellt fest, dass diese gleich schwer sind, also je ein Drittel des Ausgangsquaders betragen.

Diese Vermutung kann durch Umfüllversuche mit Hohlkörpern (Spitzkörper und zugehörige Säule haben immer gleiche Grundfläche und gleiche Körperhöhe) oder durch Wiegeversuche mit Vollkörpern (bei homogenem Material) bestätigt werden.

Durch Einsatz eines weiteren Modells (Zerlegen eines „halben Würfels“) kann – jedenfalls für den Sonderfall – der Faktor $\frac{1}{3}$ weiter bestätigt werden.



Als Ergebnis erhält man:

Das Volumen eines Spitzkörpers (Pyramide oder Kegel) beträgt genau ein Drittel der zugehörigen Säule. Ist G die Größe der Grundfläche und h die Körperhöhe so gilt:

$$V_{\text{spitzkörper}} = \frac{1}{3} * G * h$$

Hinweis:

Eine genaue Begründung der Volumenformel lässt sich mit Hilfe der Integralrechnung oder durch Anwendung des Cavalieri-Prinzips nachliefern. Die Querschnittsfunktion in Abhängigkeit von der Höhe h im Körper ist eine quadratische Funktion, die bei Integration den Faktor $\frac{1}{3}$ ergibt. Durch Zerlegung einer Dreieckssäule in drei zwar nicht kongruente, aber immerhin volumengleiche Pyramiden kann man die Beziehung für Dreieckspyramiden und durch Verallgemeinerung bzw. Zerlegungen für alle Pyramiden – im Grenzfall auch für den Kegel – beweisen.

7. Die Behandlung der Kugel

Wie für die anderen Körper, sollte auch für Kugeln nicht allein die Berechnung von Oberflächengröße und Rauminhalt im Mittelpunkt stehen, sondern die Geometrie der Kugel.

Welche **Symmetrieen** besitzt die Kugel?

Sie ist ebenensymmetrisch bezüglich jeder Ebene durch den Mittelpunkt. Dies zeigt man, indem man eine Halbkugel auf einen ebenen Spiegel legt. Was erhält man, wenn man Kugelhappen, die nicht genau Halbkugeln sind, auf einen ebenen Spiegel legt?

Sie ist drehsymmetrisch um jeden Drehwinkel bezüglich jeder Achse durch den Mittelpunkt. Auch dies lässt sich leicht durch ein passendes Modell demonstrieren.

Sie ist punktsymmetrisch zum Mittelpunkt.

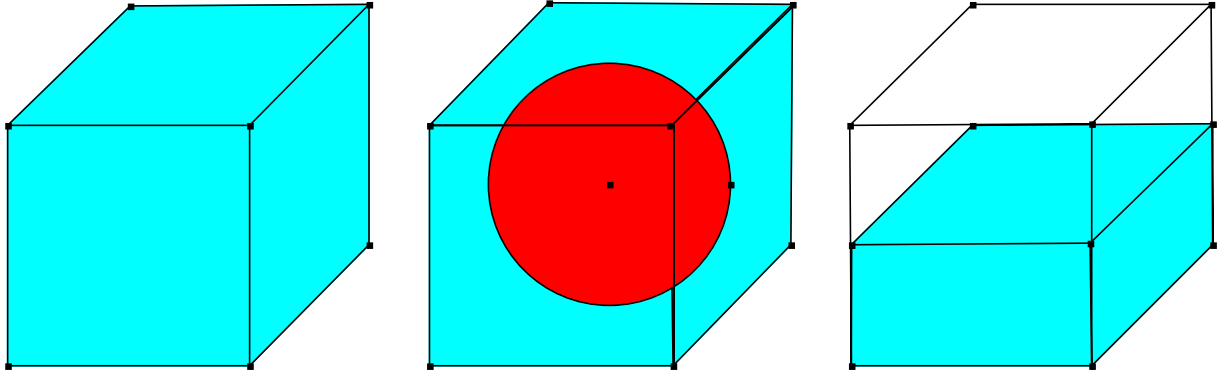
Jeder **ebene Schnitt einer Kugel** erzeugt als Schnittfläche eine Kreisfläche bzw. als Berandung eine Kreislinie. Die größtmöglichen Radien, nämlich die der Kugel erhält man bei den sogenannten Großkreisen, deren Schnittebene den Mittelpunkt M enthält. Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugeloberfläche ist ein Großkreisbogen. Auch das kann man mit Hilfe eines Globus und einer gespannten Schnur demonstrieren.

Es empfiehlt sich, das **Gradnetz der Erde** mit Breitenkreisen und Meridianen (Längenhalkreisen) genau zu betrachten und dessen Eigenschaften zu studieren (*Mathematik ist mehr als Rechnen!*). Unter Umständen kann man sogar – unter Zuhilfenahme eines Globus – eine Großkreisentfernung zweier Orte auf der Erde z.B. Stuttgart – Melbourne zeichnerisch bestimmen. Eine auch für Schüler interessante Anwendung.

Der Rauminhalt einer Kugel

Zunächst gilt es wieder, den Schülern die Problemstellung auf geeignete Weise zu vermitteln. Zu diesem Zweck dienen naheliegende Vergleiche von Kugelvolumen mit schon bekannten Vergleichskörpern.

Die einfachste Problemstellung ist wohl der Vergleich mit dem unbeschriebenen Würfel. Man lässt die Schüler schätzen, welchen Anteil des Würfelvolumens die Kugel einnimmt. Nach der Schätzung macht man einen entsprechenden Umfüllversuch: Würfel füllen. Dann passende Kugel voll eintauchen und wieder herausziehen. Wie viel Wasser ist dabei übergelaufen bzw. wie viel ist noch im Würfel zurückgeblieben?



Man erkennt leicht, dass das Kugelvolumen ziemlich genau die Hälfte des Würfelvolumens beträgt:

Kugelvolumen \approx halbes Würfelvolumen

$$V_{\text{Kugel}} \approx \frac{1}{2} * V_{\text{Würfel}}$$

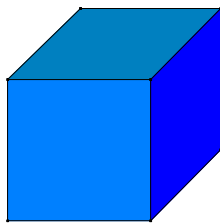
Durch einfache Vermutung könnte man nun annehmen, dass auch die Oberflächengröße der Kugel ziemlich genau die Hälfte der Oberflächengröße des Würfels beträgt. Diese Annahme ist experimentell einigermaßen plausibel zu machen: Mit drei Seitenflächen des Würfels kann man die Kugel einigermaßen genau bedecken. Damit hat man zwei wertvolle Faustformeln für Oberflächengröße und Rauminhalt der Kugel:

Sowohl die Oberflächengröße als auch der Rauminhalt einer Kugel ist etwa halb so groß wie die des zugehörigen Würfels.

Würfel

$$V = d^3$$

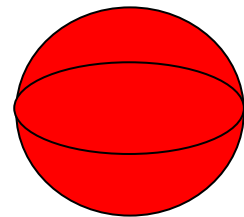
$$O = 6 * d^2$$



Kugel

$$V \approx \frac{1}{2} * d^3$$

$$O \approx 3 * d^2$$



Bevor man die genauen Formeln mit der Keiszahl π ermittelt, wird man diese Faustformeln zum überschlägigen Berechnen von Kugeln benutzen um so den Schülern immer wieder den Prozess des Vergleichens mit dem bereits bekannten Würfel abzuverlangen und zunächst die Begriffe der Oberfläche und des Rauminhalts für Kugeln zu vertiefen. Das Wissen um die Faustformeln, der eigentliche geometrische Gehalt, sollte – nach überzeugendem Experiment mit dem Eintauchversuch – zum überdauernden Wissensbestand der Schüler über die Schulzeit hinaus gefestigt werden. Die genauen Formeln werden sie ohnehin schnell vergessen oder verwechseln.

Aufgabe 15:

Hans im Glück soll eine Goldkugel von der Größe eines Kopfes mit sich herumgetragen haben. Berechne durch Überschlag mit der Faustformel den Rauminhalt der Kugel (Kopfdurchmesser ca. 20 cm = 2 dm). Wie schwer war diese Kugel?

Verschärfung der Faustformeln:

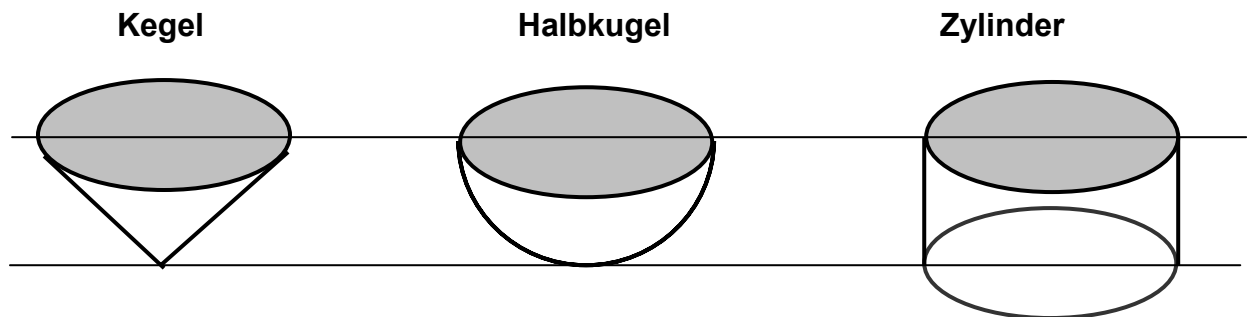
Es gibt mehrere Wege zur Verschärfung der Faustformeln:

➤ **Simple Plausibilität:**

Die Kugel ist – wie in der Ebene der Kreis – ein runder Körper. Also ist anzunehmen, dass in den Berechnungsformeln für die Kugel die Kreiszahl π auftreten muss. Man könnte nun versucht sein, die Näherungsformeln mit Hilfe der Kreiszahl π zu verschärfen. Dabei bietet sich an, den Faktor $\frac{1}{2}$ durch den Faktor $\frac{\pi}{6}$ und den Faktor 3 direkt durch die Kreiszahl π zu ersetzen und man erhält die exakten Formeln:

$$V = \frac{\pi}{6} * d^3 = \frac{4}{3} * \pi * r^3 \qquad O = \pi * d^2 = 4 * \pi * r^2$$

➤ **Vergleich der Halbkugel mit einem passenden Kegel und einem Zylinder:**



$$V_{Ke} = \frac{1}{3} * \pi * r^3 \qquad V_{HK} = V = \frac{2}{3} * \pi * r^3 \qquad V_{Zyl} = V = \frac{3}{3} * \pi * r^3$$

Kegel, Halbkugel und Zylinder haben alle drei dieselbe „Grundfläche“ (obere Öffnung der Gefäße) und gleiche Höhe. Die „Grundfläche“ ist ein Kreis mit Radius r und die Körperhöhe aller drei Körper ist r . Durch Umfüllversuche kann man zeigen, dass sich die Volumina dieser drei Körper genau wie **1 : 2 : 3** verhalten. Die Halbkugel hat also das doppelte Volumen des Kegels und zwei Drittel des Zylindervolumens. Damit

gewinnt man sofort die Volumenformel für die Kugel exakt zu: $V = \frac{4}{3} * \pi * r^3 = \frac{\pi}{6} * d^3$

- Mit Hilfe des Cavalieri-Prinzips kann man den vorstehenden Vergleich zu einem exakten Beweis verschärfen. Bohrt man aus dem Zylinder den Kegel von unten her aus, so erhält man einen Restkörper, der auf jeder Höhe h eine exakt gleich große Querschnittsfläche (Kreisring) hat, wie die Halbkugel. Daher ist dieser Restkörper zur Halbkugel volumengleich und man erhält exakt obige Formel.
- Eine weitere Möglichkeit ist die Anwendung der SIMPSON-Formel auf die Kugel. Für viele Körper gilt die Simpson-Formel (Keplersche Fassregel) zur Volumenbestimmung:

$$V = \frac{h}{6} * (G + 4 * M + D) \qquad \text{wobei } h = \text{Körperhöhe, } G = \text{Grundfläche,}$$

$D = \text{Deckfläche; } M = \text{Querschnittsfläche auf halber Höhe.}$

Angewandt auf die Kugel erhält man die angegebene Formel für das Volumen.

Kugeloberfläche:

Vergleicht man die Kugel mit dem umschriebenen Zylinder, so kann man eine Eingrenzung des Wertes für die Kugeloberfläche gewinnen:

$$G + D < \text{Kugeloberfläche} < \text{Zylinderoberfläche}$$

$$2 * \pi * r^2 < \text{Kugeloberfläche} < 6 * \pi * r^2$$

Damit ergibt sich die naheliegende Vermutung: $O_{\text{Kugel}} = 4 * \pi * r^2$

Zusammenhang zwischen Kugeloberfläche und Kugelvolumen:

Analog den Verhältnissen für Umfang und Flächeninhalt von Kreisen (Sektorenmodell) gibt es einen engen Zusammenhang zwischen Kugeloberfläche und Kugelvolumen. Wir denken uns die Oberfläche einer Kugel mit einem feinen Gitternetz (ähnlich dem engmaschigen Gradnetz der Erde) überzogen. Dann kann man die gesamte Kugel zusammengesetzt denken aus lauter kleinen Pyramidchen mit einer Maschenfläche als Grundfläche und der Spitze im Kugelmittelpunkt. Jede dieser Pyramiden hat den

Rauminhalt $V_i = \frac{1}{3} * M_i * r$, wobei M_i der betreffende Flächeninhalt der Grundmasche ist.

Addiert man alle diese V_i auf, so erhält man das gesamte Kugelvolumen:

$$V = \frac{1}{3} * r * (M_1 + M_2 + M_3 + \dots) = \frac{1}{3} * r * O_k, \text{ denn die Summe aller } M_i \text{ ist gleich der}$$

ganzen Kugeloberfläche $* O_k$. Es gilt also folgender Zusammenhang: $V_k = \frac{1}{3} * r * O_k$.