Fritz Nestle, Ulm (Ludwigsburg)

Konstruktion von Aufgaben

zur

Lernerfolgskontrolle

33. GDM-Tagung 1999 in Bern
5.3.1999

Inhalt

1 Hinführung
2 Einleitung
3 Gesichtspunkte für die Aufgabenauswahl und -konstruktion
4 Ein Beispiel für eine klassische Aufgabe - und die Lösung eines Schülers
5 Drei Beispiele aus TIMSS
6 Weitere Beispiele von Prüfungsaufgaben und ihre Approximation durch andere Aufgabenformen
7 Vergleich von Aufgaben zur Prüfung von Teilqualifikationen mit "klassischen" Aufgaben
8 Aufgabenform und Lernorganisation

Hinführung

Aufgaben analog dem BWT

$0{,}26+0{,}072 = ?$

$3{,}5-2{,}67 = ?$

$0{,}4\cdot 0{,}7 = ?$

$3:0{,}2 = ?$

Bewertungsvorschrift

Drei oder vier richtige Lösungen:

Das Dezimalrechnen wird beherrscht.

Aufgabenanalyse und Aufgabenkonstruktion

Stiefkinder der Mathematikdidaktik

aber Potential für

Zeitersparnis
Korrekturgerechtigkeit
sichtbaren Lernerfolg
Unterrichtsreform
...

TIMSS

Erster umfassender externer Leistungsvergleich für den Mathematikunterricht

Ergebnis

Bei sehr vielen Schülern erreicht der Mathematikunterricht extrem wenig.

Zentrale Fragen

- Liegt der Fehler beim üblichen Unterricht des Fachs Mathematik?

- Gibt es Grenzen der Lernfähigkeit der Schüler?

- Wie sehen die Instrumente zur Messung des Lernerfolgs aus und was leisten sie?

**Schüler arbeiten,
sowohl in der Lernphase als auch in der Prüfungsphase,
an irgendwelchen Aufgaben.**

Die Bearbeitung wird irgendwie bewertet.

Ist Präzisierung möglich?

Gesichtspunkte für die Aufgabenauswahl und -konstruktion

- fachliche Anforderungen,
- fachliche Voraussetzungen für die Bearbeitung,
- allgemeine kognitive Voraussetzungen für die Bearbeitung,
- Verbindung mit vorausgegangenen Unterweisungen oder Studien,
- Zeitaufwand für die Bearbeitung,
- Korrekturfreundlichkeit,
- Zeitaufwand für die Korrektur,
- Eignung für Selbstkontrolle,

Ein Beispiel für eine klassische Aufgabe - und die Lösung eines Schülers

1.) Schreibe in römischen Ziffern 936, 1 312, 989!
2.) Schreibe in arabischen Ziffern MCDLXXIV, MCCXLI!

3.) Addiere 2 654 und 1 346! Multipliziere dann die Summe mit 1 000!

4.) Bauer Mäckler verkauft ein Rind zu 1 678 DM und acht Ferkel zu je 67 DM Vom Erlös kauft er einen Häcksler. 136 DM behält er übrig. Was kostet die Maschine?
5.)Ein Händler kauft zwei teure und drei billige Fahrräder für zusammen 694 DM. Was kostet eines der billigen Fahrräder, wenn ein teures Fahrrad 158 DM kostet?

3.) Addiere 2 654 und 1 346! Multipliziere dann die Summe mit 1 000!

3.)

$$\begin{array}{r} 2654 \\ +\,1_{1}3_{1}4_{1}6 \\ \hline 4000 \end{array}$$

Ergebnis: Der 1000sten Teil ist 4000

33. GDM-Tagung Bern, 1999

Schüler liefern auch solche Bearbeitungen.
Die Bewertung dieser Bearbeitung ist schwierig.

Korrekturfreundlichkeit - drei Beispiele aus TIMSS

Beispiel 1: P13

Das Herz eines Menschen schlägt in der Minute 72 mal.
Wie oft schlägt es bei diesem Tempo ungefähr in einer Stunde?

A. 420 000
B. 42 000
C. 4 200
D. 420

Bewertung, auch in Selbstkontrolle, einfach

Korrekturfreundlichkeit - drei Beispiele aus TIMSS

Beispiel 2: M8

Multipliziere: 0,203*0,56 =

Antwort: ____

Bewertung - fast - unproblematisch,
Selbstkontrolle möglich.

Korrekturfreundlichkeit - drei Beispiele aus TIMSS

Beispiel 3: T1

In zwei Kisten befinden sich 54 kg Äpfel. Die zweite Kiste wiegt 12 kg mehr als die erste Kiste. Wieviele Kilogramm Äpfel sind in jeder Kiste?

Schreibe Deine Lösungsschritte auf.

Bewertung subjektiv und zeitabhängig,
Selbstkontrolle fast unmöglich,
sachgerechte Korrektur mühsam.

Einwände gegen TIMSS-Aufgaben

Vorurteile gegen Auswahlantwortaufgaben

Bei 1 aus 4 nicht ganz unberechtigt.

4 Antwortalternativen werden angeboten; es ist bekannt, daß genau eine davon richtig ist.

Ab x aus 5 effektive Aufgabenform

Weitere Beispiele von

Prüfungsaufgaben und ihre Approximation durch andere Aufgabenformen

Beispiel 1: Analog zur zentralen Klassenarbeit 1998; Gymnasium BW

Ein Mammutbaum ist zu einem bestimmten Zeitpunkt 18 m hoch; ein Jahr später hat er eine Höhe von 20,5 m erreicht.

a) Wie hoch wäre der Baum bei Voraussetzung exponentiellen Wachstums 4 Jahre nach Beginn der Beobachtung (gerundet auf 0,5 m).Wann wäre er bei dieser Annahme etwa 75 m hoch?

b) Mammutbäume werden 75 m hoch. Die logistische Formel für die Wuchshöhe W(x) nach x Jahren

$$W(x+1) = W(x) + k*W(x)*(75-W(x))$$

beschreibt das Wachstum besser. Welche Wuchshöhe hat der Baum nach dieser Formel 4 Jahre nach Beginn der Beobachtung zu erwarten?

Anforderungen

- Analyse eines (Pseudo-)Sachtextes (der exponentielle Ansatz wird vorgegeben),
- Kenntnis einer Formel für das exponentielle Wachstum,
- passende Zuordnung von Variablenwerten aus den Angaben des Textes,
- Fähigkeit zur numerischen Bestimmung der Konstanten in der Formel,
- Anwendung der Formel zu einer Extrapolation,
- zahlenmäßige Berechnung der Zeitvariablen im Exponenten,
- Fähigkeit zur numerischen Bestimmung einer Konstanten aus einer linearen Gleichung "komplizierten Aussehens",
- Anwendung dieser Formel zu einer Extrapolation,
- Fähigkeit, diese Einzelqualifikationen zu reihen und zu verknüpfen.

Approximation durch Teilaufgaben

1. Textanalyse

Welche Aussagen stimmen mit dem Text überein? Kreuze an:

O Mammutbäume werden 75 m hoch.

O Mammutbäume wachsen exponentiell.

O Das exponentielle Wachstum wird durch die logistische Formel beschrieben.

O Der Mammutbaum wächst jedes Jahr um 2, 5 m.

O Nach vier Beobachtungsjahren kann man die Endhöhe eines Mammutbaums berechnen.

Approximation durch Teilaufgaben

2. Auflösung von Gleichungen

Berechnen Sie, soweit möglich, die Werte a und b aus den Gleichungen

$4{,}1 = 3{,}6 + a \cdot 3{,}6 \cdot (15 - 3{,}6)$ a =

$e^a = 41/36$ a =

$3a + 2b = 9 \quad b/a = 1/3$ a =   b =

$e^{a+2} = 15$ a =

Approximation durch Teilaufgaben

3. Berechnen von Werten

Entnehmen Sie aus dem Text, soweit ohne Rechnung möglich, die folgenden Werte und tragen Sie diese ein:

W(x) =	W(0) =
W(1) =	W(x+1) =
W(3) =	W(x+3) =
W(4) =	W(x+4) =
W(75) =	

Approximation durch Teilaufgaben

4 Erkennen von (Wachstums-)Funktionen

Welche der folgenden Formeln für W beschreiben exponentielles Wachstum (k, x und E sind reelle Zahlen):

- O $W(x+1) = W(x)^{k+1}$
- O $W(x+1) = W(x) + k \cdot W(x) \cdot (E - W(x))$
- O $W(x) = e^{k \cdot (x+4)}$
- O $W(x) = x \cdot E \cdot e^{k}$
- O $W(x+1) = Ee^{k \cdot (x+4)}$

Gemeinsame Eigenschaften dieser Aufgaben

-

- Die erwarteten Anworten sind eindeutig bestimmt.
  Es gibt - praktisch - keine Unsicherheiten bei der Bewertung.
- Der Platz für jede Antwort ist eindeutig bestimmt.
  Suchzeiten bei der Korrektur sind minimal.
- Jede Aufgabe erfordert zur Bearbeitung eine definierbare Teilqualifikation.
  Diese kann bei Bedarf in Unterqualifikationen aufgeschlüsselt werden.

Problem:Beratung

Weitere Beispiele von

Prüfungsaufgaben und ihre Approximation durch andere Aufgabenformen

Beispiel 2: Analog zu einer Aufgabe der zentralen Reifeprüfung BW, **Grundkurs Mathematik/Analysis, 1998**

Der Querschnitt eines Flußtals wird durch einen Kurvenabschnitt des Schaubilds von f (f(x)=-1/8*x3 + 3/4*x2 mit reellem x) zwischen dem Hochpunkt H und dem Punkt P (-2/f(-2)) beschrieben. Von H aus setzt sich das Gelände horizontal fort, von P aus in Richtung der Geraden durch P und den Punkt Q (3/f(3)).

a) Bestimmen Sie gemeinsame Punkte des Schaubilds mit den Koordinatenachsen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Wie heißt die Gleichung der Geraden PQ. Zeichnen Sie den Talquerschnitt mit dem angrenzenden Gelände in einem geeigneten Koordinatensystem. Bei Hochwasser wird der Punkt P erreicht. Welchen Flächeninhalt hat dann der mit Wasser gefüllte Teil des Tals?

b) Von H soll ein geradliniger Leitungstunnel gebohrt werden, der in B(u, f(u)) mit 0<u<4 mündet. Wählen Sie B so, daß der Tunnel maximales Gefälle bekommt.

c) Bei einer Trockenheit sinkt der Wasserspiegel bis auf R(-1/f(-1)). Ab welcher Höhe senkrecht über H sieht man diesen Punkt?

(a), (b) und (c): 11, 9 und 10 Verrechnungspunkte

Anforderungen

- Analyse eines (Pseudo-)Sachtextes (Kenntnis der Grundbegriffe),
- Kenntnis der Verfahren der Kurvenuntersuchung für ganz-rationale Funktionen, (Schnittpunkt mit den Achsen, Untersuchung auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte)
- Zeichnen eines Schaubilds zu einer Wertetafel,
- Aufstellen von Geraden- und Tangentengleichungen; Bestimmung des Schnittpunkts von zwei Geraden,
- Bestimmung einer Stammfunktion für ganz-rationale Funktionen und Berechnung eines bestimmten Integrals,
- passende Zuordnung von Variablenwerten aus den Angaben des Textes,
- Fähigkeit, diese Einzelqualifikationen zu reihen und zu verknüpfen.

Aufgaben aus dem brasilianischen

Hochschulzugangsexamen (Vestibular 1999)

Frage 52

Se as matrizes A = $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ **e B =** $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

são tais que AB = BA , pode se afirmar que

a) A é inversibel b) det A = 0 c) b = 0 d) c = 0 e) a = d = 1

Frage 57

Dividindo-se o polinômio p(x) por $2x^2$ - 3x +1, obtém-se quociente $3x^2$ + 1 e resto -x +2. Nessas condições, o reste da divisão de p(x) por x - 1 é:

a) 2 b) 1 c) 0 d) -1 e) -2

Vergleich von

Aufgaben zur Prüfung von Teilqualifikationen

mit "klassischen" Aufgaben

Vorteile

- Die Auswertung braucht wenig Zeit.
- Die Auswertung liefert unmittelbar eine Diagnose von konkreten Lerndefiziten. Dies erleichtert eine Therapie.
- Die Auswertung ist transparent. Der Lernende kann die Korrektur nachvollziehen.
- Die Auswertung ist einfach; auch der Lernende selbst kann sein Arbeitsergebnis bewerten. Dies ermöglicht andere Arbeitsformen.

Vergleich von

Aufgaben zur Prüfung von Teilqualifikationen

mit "klassischen" Aufgaben

Nachteile

- Die Beherrschung der Teilqualifikationen ist eine notwendige, keinesfalls eine hinreichende Bedingung für das Lösen der komplexen Aufgabe.
- Die - scheinbare - Vielfalt der Teilqualifikationen
- Der Platzbedarf für die Aufgabenstellung
- Der Zeitaufwand für die Formulierung der Aufgaben
  In manchen Ländern gibt es dafür Datenbanken
- Kreativität findet - scheinbar? - keinen Ansatz.

Aufgabenform und Lernorganisation

Lernerfolg im klassischen Unterrricht

Experteneigenschaft des Lehrers unentbehrlich

- **für Korrektur**
- **als Informationsquelle**
- **für Erziehung?**

Gibt es den Informationsvorsprung des Lehrers noch?

Aufgabenform und Lernorganisation

Alternative Lernorganisation

Der Lernende

- hat freien Zugang zu den Informationsquellen
- kann seinen Lernerfolg selbst prüfen

Neue Grundqualifikation: Lernen lernen

Neue Lehrerrolle: Beratung