

Gruppen – Untergruppen

1. Aufgabe

Ist (M, \circ) eine Gruppe, wenn

- i) $M = \mathbb{Z}$ und \circ die übliche Multiplikation ist?
- ii) $M = \mathbb{R}$ und \circ die gewöhnliche Addition reeller Zahlen ist?
- iii) $M = \{z \mid z \in \mathbb{Z} \text{ und } z = \sqrt{2}\}$ und \circ die gewöhnliche Multiplikation?

2. Aufgabe

Handelt es sich bei $G = (\{a, b, c\}, \circ)$ mit folgender Gruppentafel um eine Gruppe?

\circ	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Wenn ja, welches ist das neutrale Element und ist die Gruppe kommutativ? Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe mit dieser Gruppentafel an.

3. Aufgabe

Sei S die Menge der geraden ganzen Zahlen $2\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass S eine Gruppe mit der gewöhnlichen ganzzahligen Addition ist.

4. Aufgabe

Sei $G = (\mathbb{Q}, +)$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Ist $H = (\mathbb{Z}, +)$ eine Untergruppe von G ?

5. Aufgabe

Beweisen Sie: Der Durchschnitt zweier Untergruppen H und K der Gruppe G ist eine Untergruppe der Gruppe G .

6. Aufgabe

Zeigen Sie die Menge der folgenden Funktionen mit der Verkettung von Funktionen als Verknüpfung eine Gruppe ist.

$$f_0(x) = x; f_1(x) = \frac{1}{x}; f_2(x) = -x; f_3(x) = -\frac{1}{x} \text{ mit } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

7. Aufgabe

Man beweise: Ist G eine endliche Gruppe der Ordnung n , so ist $a^n = e$ für jedes $a \in G$.

8. Aufgabe

Zeigen Sie, dass in der Gruppe der 2×2 Matrizen mit Einträgen aus den reellen Zahlen \mathbb{R} mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung die Assoziativität gilt:

Hinweis: Verwenden Sie die drei 2×2 Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

9. Aufgabe

Zeigen Sie: In jeder Gruppe G gilt: $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1} \quad \forall a, b \in G$.

10. Aufgabe

Sei G die zyklische Gruppe der Ordnung 4 durch $\{a\}$ erzeugt, also $G = \langle a \rangle$.

Sei $H = \langle a^2 \rangle$ eine Untergruppe von G . Bestimmen Sie alle rechten Nebenklassen von H in G .

11. Aufgabe

Richtig oder falsch?

- Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es mindestens eine Gruppe der Ordnung n .
- Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau eine Gruppe der Ordnung n .
- Jede Gruppe hat eine Untergruppe.
- Jede Gruppe besitzt eine nichttriviale Untergruppe.
- Die Menge der 2×2 Matrizen mit reellen Einträgen und der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung ist eine Gruppe.
- Zyklische Gruppen sind abelsch.
- 1 ist das einzige Element aus der Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} , das die zyklische Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ erzeugt.
- Jede Gruppe der Ordnung p mit p Primzahl besitzt genau 2 Untergruppen.

12. Aufgabe

Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $x \oplus y := x + y - x \cdot y$. (Hier wird eine Verknüpfung definiert)

Man zeige, dass $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \oplus)$ eine kommutative Gruppe ist.

13. Aufgabe

Man beweise: Gilt in einer Gruppe $G = (M, +)$ mit neutralem Element 0 für jedes Element die Gleichung $x + x = 0$, so ist G kommutativ.

14. Aufgabe

Gegeben ist eine Gruppe G der Ordnung 17. Geben Sie alle Untergruppen an.

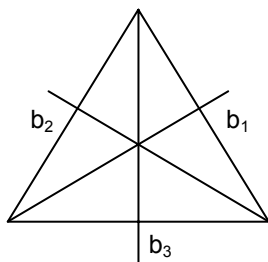
15. Aufgabe

Sei H die triviale Untergruppe $(\{e\}, \circ)$ einer Gruppe G . Bestimmen Sie die verschiedenen rechten Nebenklassen von H in G .

16. Aufgabe

Zeigen Sie: Die Gruppe S_7 besitzt keine Untergruppe der Ordnung 11.

Gruppentafel der Diedergruppe des regulären Dreiecks D_3



Spiegelungen b_1, b_2 und b_3 .

Drehungen gegen den Uhrzeigersinn

$e = 0^\circ$

$a_1 = 120^\circ$

$a_2 = 240^\circ$

\circ	e	a_1	a_2	b_1	b_2	b_3
e	e	a_1	a_2	b_1	b_2	b_3
a_1	a_1	a_2	e	b_3	b_1	b_2
a_2	a_2	e	a_1	b_2	b_3	b_1
b_1	b_1	b_2	b_3	e	a_1	a_2
b_2	b_2	b_3	b_1	a_2	e	a_1
b_3	b_3	b_1	b_2	a_1	a_2	e