V Didaktik der Arithmetik und Algebra, WS 2004/2005

Barbara Schmidt-Thieme

Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

Aufgaben

1. Pizza — an was denken Sie? (Bitte sofort notieren!)

Aufgaben

2. Was gefällt Ihnen besser? Und warum?

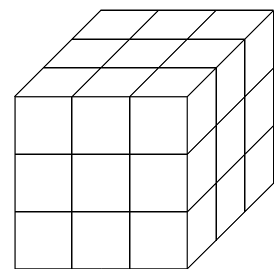
$$n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

oder

"Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist gleich der Hälfte des Produktes von n mit seinem Nachfolger."

Aufgaben

3. Hier sehen Sie einen Würfel aus kleinen Würfeln. Wieviele kleine Würfel bleiben übrig, wenn Sie ein Säule wegnehmen? Warum? Wie sieht es bei Würfeln mit einer Kantenlänge aus 4, 5, ... kleinen Würfeln aus?



Inhalte

Mit folgenden **Inhalte und Fragen** werden wir uns also z. B. beschäftigen:

- Was sollen Schüler im Algebra- oder Arithmetikunterricht lernen?
- Wie kann man den Stoff aufbereiten?
- Welche typischen Probleme bzw. Möglichkeiten ihrer Vermeidung oder Behebung gibt es?
- Was ist der Unterschied zwischen Brüchen und rationalen Zahlen?
- Was haben die Dezimalzahlen mit Prozenten zu tun?
- Wieviel Fachwissen verträgt der Schüler? Und der Lehrer?

Übersicht

- **Kapitel 1** Zahlen
- **Kapitel 2** Gleichungen
- **Kapitel 3** Funktionen
- **Kapitel 4** Terme

Literatur

Malle, G: Didaktische Probleme der elementaren Algebra.
Braunschweig: Vieweg 1993.

Padberg, Friedhelm: Didaktik der Bruchrechnung.
Heidelberg: Spektrum 2002.

Vollrath, Hans-Joachim: Algebra in der Sekundarstufe.
Heidelberg: Spektrum 2003.

I. Zahlen

II. Gleichungen

III. Funktionen

IV. Terme

Übersicht: Zahlen

1) Einführendes Beispiel: Negative Zahlen

2) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

3) $\mathbb{R}$

4) Bruchzahlen

1) Negative Zahlen in der Grundschule

die Vorschläge der Kinder sind:

$18 \cdot 11 - 19 - 9 \cdot 6 = 1020$ oder

$18 \cdot 11 - 19 - 9 \cdot 6 = 125$

$18 \cdot 11 - 19 - (9 \cdot 6) = 125$

$(18 \cdot 11) - 19 - (9 \cdot 6) = 125$

$(18 \cdot 11 - 19 - 9) \cdot 6 = 1020$

$18 \cdot (11 - 19) + (9 \cdot 6)$ geht nicht

$18 \cdot 11 - 19 + 9 \cdot 6 = 1128$ oder

$18 \cdot 11 - 19 + 9 \cdot 6 = 233$

$(18 \cdot 11 - 19 + 9) \cdot 6 = 1128$

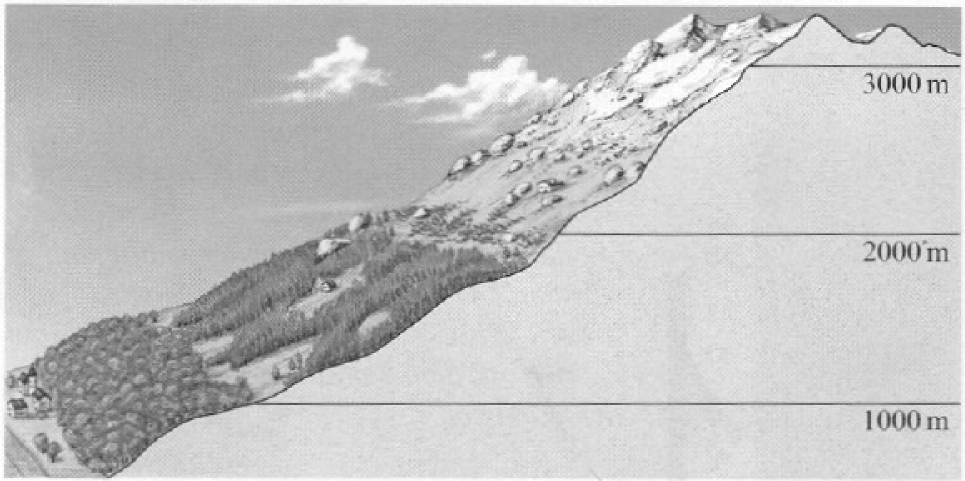
$18 \cdot (11 - 19 + 9 \cdot 6)$ geht nicht

$18 \cdot 11 - (19 - 9 \cdot 6)$ geht nicht

$18 \cdot 11 - (19 - 9) \cdot 6 = 138$

Negative Zahlen in der Sekundarstufe I

1 Ganze Zahlen



1

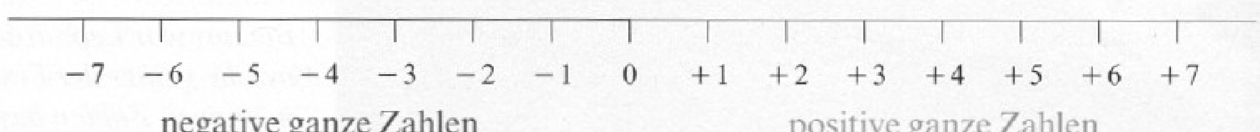
Aus einer Wettervorhersage:

Tageshöchsttemperaturen:
In den Tälern: 7 bis 9 Grad über Null
In 1 000 m Höhe: 2 Grad über Null
In 2 000 m Höhe: 3 Grad unter Null
In 3 000 m Höhe: 8 Grad unter Null

Was bedeuten die Angaben „über Null“ und „unter Null“?
In welchen Höhen ist mit Schneefällen zu rechnen?

Zur Darstellung und Beschreibung von Temperaturangaben unter Null, Schulden oder Tiefenangaben setzt man ein Minuszeichen vor die natürliche Zahl: -8, -17, -35. Diese Zahlen heißen **negative ganze Zahlen**. Natürliche Zahlen heißen daher auch **positive ganze Zahlen**. Zur deutlicheren Unterscheidung kann man vor positive Zahlen das Vorzeichen Plus setzen: $+8$, $+17$, $+35$.

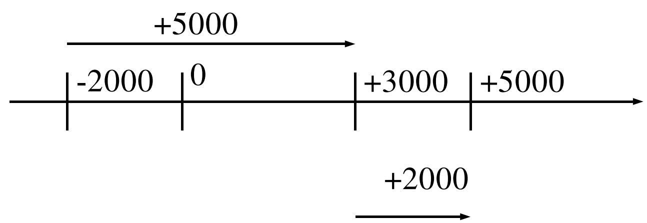
Man erweitert den **Zahlenstrahl** zur **Zahlengeraden**.
Rechts der Null stehen positive ganze Zahlen. Sie haben das Vorzeichen Plus.
Links der Null stehen negative ganze Zahlen. Sie haben das Vorzeichen Minus.



Modelle: Theorie der Skalenbereiche

(Jahnke 2003)

Temperaturen, Kontostände, geografische Höhen → Zahlenstrahl



Beispiel: Kontostand

Addition pos. Zahl	Einzahlung, Buchen einer Gutschrift
Subtraktion pos. Zahl	Auszahlung, Löschen einer Gutschrift
Addition neg. Zahl	Buchen einer Lastschrift ?
Subtraktion neg. Zahl	Löschen einer Lastschrift ?

Intention und Interpretation

Intention: Warum führe ich diesen Begriff
mit bestimmten Eigenschaften in der Schule ein?

Interpretation: Erklärung durch Sachkontext

Problem: bei negativen Zahlen liegen Aspekte weit auseinander!

Intention: algebraisches Kalkül
Interpretation: Sachkontexte brauchen dieses Kalkül nicht!

Beispiele:

? Zahlen bestimmen Größen: Negative Größen?

? $-3 > -4$, aber 4000 Euro sind doch mehr Schulden als 3000 Euro?

Grundlagen

$\boxed{\text{Maxime}}$

Mathematische Begriffe fallen nicht vom Himmel,
sondern sind vom Menschen gemacht

Aus der Geschichte:

Leonardo von Pisa (1170 (?)-1250(?)): Textaufgabe mit negativer Lösung
$\longrightarrow$ Schulden

Michael Stifel (1487-1567): absurde, fiktive Zahlen, aber Fiktion äußerst nützlich; z.B. bei Lösung quadratischer Gleichungen

Ab 1600: negative Zahlen als Rechenobjekte akzeptiert, Nutzen im Kalkül; doch was ist ihre "Natur"?

19. Jh.: formal definiertes mathematisches Objekt

Methodischer Grundgedanke

Bergiff ist nicht Bezeichnung eines vorgegebenen Inhalts (aus Alltag; empirischer Begriff),

sondern: nach formaler Definition nach Deutung gesucht (theoretischer Begriff).

Rechenregeln für negative Zahlen sind nicht aus anschaulichen Gegebenheiten herleitbar
sondern: sie sind willkürlich, aber begründet festgelegt.

Vorschlag (angelehnt an geschichtliche Entwicklung des Kalküls)

1. (Naives) Arbeiten mit algebraischen Termen und Gleichungen.
2. Entdecken: Lösungen mit negativen Vorzeichen $\rightarrow$ sinnlos?
3. Negative Zahlen als Zwischenlösung führen zu richtiger Lösung.

Tim rechnet die Aufgabe $5483 - 3654$ halbschriftlich:

$$\begin{aligned} 5483 - 3654 &= 2000 - 200 + 30 - 1 = 1829 \\ 5000 - 3000 &= 2000 \\ 400 - 600 &= -200 \\ 80 - 50 &= 30 \\ 3 - 4 &= -1 \end{aligned}$$

(4. Geschichte: auch "große" Leute hatten Probleme mit negativen Zahlen!)

Hans Niels Jahnke: Numeri Absurdi Infra Nihil. In: Mathematik lehren 121 (2003) 21-40.

Exkurs: Themenkreise; Beispiel: Quadrieren

- Quadrieren und Wurzelziehen als Operationen
  und ihre Umkehroperationen in $\mathbb{R}$;
  Irrationalität, reelle Zahlen
- neue Termarten
- quadratische und Wurzelfunktionen
- quadratische Gleichungen

Themenstränge und Jahrgangsstufen

Jg.	Zahlen	Terme	Funktionen	Gleichungen
5.	$\mathbb{N}$ Grundrechen-arten	Einfache Terme, Tabellen, Einsetzungen	Tabellen mit Variablen, Operatoren	Lösen einfacher Gleichungen durch Probieren, Überlegen, Gegenoperatoren
6.	$\mathbb{B} = \mathbb{Q}^+$ Bruchrechnung Dezimalbrüche	Einfache Terme mit Brüchen; Einsetzungen	Tabellen mit Variablen; Bruchoperatoren	Lösen einfacher Gleichungen durch Gegenoperatoren
7.	$\mathbb{Q}$ Grundrechen-arten	Einfache Terme mit positiven und negativen Zahlen	Proportionale, antiproportionale Funktionen; empirische Funktionen	Lösen einfacher Gleichungen durch Gegenoperatoren
8.	$\mathbb{Q}$ Grundrechen-arten; Potenzen mit natürlichen Exponenten	Termumformun-gen; „ganze“ Terme, Bruchterme	Lineare Funktio-nen; Funktions-gleichungen; Eigenschaften von Funktionen	Lösen von Glei-chungen durch Äquivalenzumfor-mungen; Bruchgleichungen; einfache Glei-chungssysteme; Aufstellen und Umformen von Formeln
9.	$\mathbb{R}$ Quadrieren und Wurzelziehen; Irrationalität	Terme mit Quadra-ten und Wurzeln	Quadratische Funktionen; Wurzelfunktio-nen; Eigenschaften quadratischer Funktionen; Umkehrfunktion	Quadratische Gleichungen; Wurzelgleichun-gen
10.	$\mathbb{R}$ Potenzrech-nung	Terme mit Poten-zen; Vereinfachung; Terme mit trigonometrischen Funktionen	Potenzfunktionen; Exponentialfunk-tionen und Loga-rithmusfunktio-nen; trigonometrische Funktionen	Potenzgleichun-gen; Exponentialglei-chungen; Trigonometrische Gleichungen

(Vollrath 7)

Themenstränge und Jahrgangsstufen: Bildungsstandards 2004

Jg.	Zahlen	Terme	Funktionen	Gleichungen
5/6	$\mathbb{N}$, einfache Brüche; Grunderchenarten, einfache Potenzen		proportionale Zuordnung	einfache Gleichungen, Dreisatz
7/8	$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	Termumformungen, binomische Formeln; inhaltliches Verständnis und Variation von Formeln	lineare Funktionen, anti-, proportionale Zuordnungen, Prozenterechnung	Äquivalenzumformungen, lineare/ Bruchgleichungen, -systeme
9/10	$\mathbb{R}$	Termberechnungen, inhaltliches Verständnis und Variation von Formeln	quadratische Funktionen	quadratische Gleichungen

2a) Übersicht: Themenstrang Zahlen

Jg	Zahlen
5	$\mathbb{N}$, Grundrechenarten
6	$\mathbb{Q}^+$, Bruchrechnung, Dezimalbrüche
7	$\mathbb{Q}$, Grundrechenarten
8	$\mathbb{Q}$, Grundrechenarten, Potenzen mit natürlichen Exponenten
9	$\mathbb{R}$, Quadrieren, Wurzelziehen, Irrationalität
10	$\mathbb{R}$, Potenzrechnung

(Vollrath 7, Auszug)

b) Zahlen mathematisch

Zahl? Was sind Zahlen? Wie sind Zahlen? Wozu verwendet man sie?

Verwendung: (ab)zählen, messen, rechnen, ordnen, ...

Charakterisierung (der Zahlen verschiedener Zahlbereiche):

- Eigenschaften und Regeln (algebraische Struktur)
  Ordnungsstruktur
  Axiomatische Grundlage

- Zahlbereichserweiterung: durch Paarbildung und Äquivalenzklassen

Wesen: "Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." (L. Kronecker 1886)

existent	gedacht
entdecken	erfinden

c) Natürliche Zahlen

Peano-Axiome: Menge N mit

(P1) $1 \in N$

(P2) $a \in N \to a + 1 \in N$

(P3) $\forall a, b \in N; a \neq b \to a + 1 \neq b + 1$

(P4) $\forall a \in N : a + 1 \neq 1$

(P5) Menge M mit $1 \in M$ und $\forall n \in N : n \in M \to n + 1 \in M$, dann $N \subseteq M$.

c) Natürliche Zahlen

Grundoperation: Addition

- erzeugt alle natürlichen Zahlen ($1 + ... + 1 = n$)
- ordnet zwei natürlichen Zahlen eine dritte zu
- andere Operationen lassen sich aus ihr gewinnen

Operation	Gegen-/Umkehroperation	
Addition	Subtraktion	Bedingung
$\underbrace{1 + ... + 1}_{n-mal} = n$	$c - b = a \leftrightarrow a + b = c$	$c - b \in \mathbb{N} \leftrightarrow b < c$
$a + b = c$		(Kleiner-Relation, $\mathbb{Z}$)
Multiplikation (wdh. Addition)	Division	Bedingung
$\underbrace{b + ... + b}_{a-mal} = a \cdot b$	$c : b = a \leftrightarrow a \cdot b = c$	$c \vert b \leftrightarrow c : b = a \in \mathbb{N}$
$\underbrace{b + ... + b}_{a-mal} = \underbrace{a + ... + a}_{b-mal}$		(Teilbarkeit, Primzahlen, $\mathbb{Q}$)
Potenzieren	Wurzelziehen (Basis?)	Logarithmieren (Exponent?)
$b \cdot ... \cdot b = b^a = c$	$\sqrt[b]{c} = a$	$\log_a c = b$
$2^3 = 2 \cdot 3$	($\mathbb{R}$)	

c) Natürliche Zahlen

Verknüpfungen: $n * n = ?$

- Abgeschlossenheit: formal nur bei Addition, Multiplikation, Potenzieren
  in weiterem Sinne bei Subtraktion, Division
- Assoziativität
- Kommutativität (nicht bei Subtraktion, Division, Potenzieren)
- Distributivität der Multiplikation bzgl. der Addition
- Rolle der 0, 1 als neutrale Elemente

Erweiterung:

Minimum, Maximum $\min(a, b)$ $\max(a, b)$
ggT, kgV
Restklassenarithmetik (Uhr, Codierung)

d) Negative Zahlen

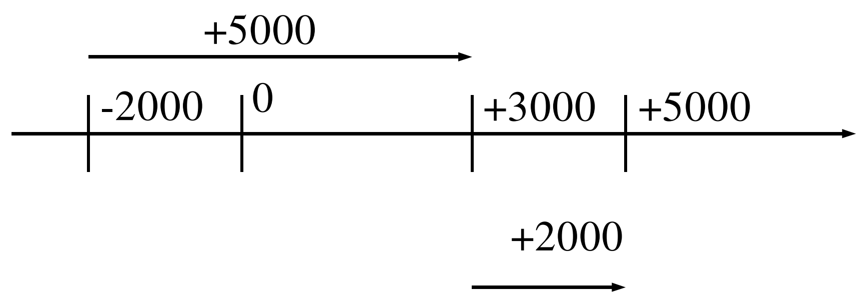
Abgeschlossenheit bzgl. der Subtraktion

Einführung mathematisch über Paarbildung und Äquivalenzklassen

$$(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a - b = c \in \mathbb{Z}$$

Skalenmodelle

Temperaturen, Kontostände, geografische Höhen $\rightarrow$ Zahlenstrahl



d) Negative Zahlen

Vorzeichenregeln

Erinnerung: $(-r) \cdot (-s) = rs$

Mögliche Zugänge:

- Skalenmodelle, Operationen sind Zustandsveränderungen
- Rechenfolgen

2·5	=	10	3·2	=	6	(-3)·2	=	-6
1·5	=	5	3·1	=	3	(-3)·1	=	-3
0·5	=	0	3·0	=	0	(-3)·0	=	0
(-1)·5	=	-5	3·(-1)	=	-3	(-3)·(-1)	=	3
(-2)·5	=	-10	3·(-2)	=	-6	(-3)·(-2)	=	6

- genetischer Zugang

Formulierung:

- sprachlich

"Zwei Zahlen mit gleichem Vorzeichen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert. Zwei Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und ein Minuszeichen vor das Produkt setzt."

- Algorithmen

3) Reelle Zahlen

Motivation: $x^2 - 2 = 0$

Bestimme die Zahlen, deren Quadrat 2 ist.

Bestimme die Seitenlänge eines Quadrates, dessen Flächeninhalt doppelt so groß ist wie der des Einheitsquadrats.

Bestimme die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat.

$\sqrt{2} = ?$ Name ? Eigenschaften ?

Termumformungen, Rechnen und Beweisen mit Wurzeltermen

a) Zahlenwert und Irrationalität

Dezimalbruch (endlich, unendlich periodisch)? Bruch $\frac{p}{q}$ (gekürzter Bruch)?

Satz: Ist p eine Primzahl, so gibt es keine rationale Zahl x mit $x^2 = p$.
Beweis: Angenommen es gibt eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ mit $(\frac{m}{n})^2 = p$.
Dann gilt $m^2 = n^2 p$. Widerspruch!

$\sqrt{2}$ ist also irrational.

- Beweis
- indirekter Beweis

$\rightarrow$ Punkte auf der Zahlengerade

$\rightarrow$ unendlich nicht periodischer Dezimalbruch
(durch endlich beliebig genau approximierbar)

$\rightarrow$ Annäherung an den Zahlenwert über Intervallschachtelung

b) Numerik

Ersetzen des Wurzelausdrucks durch einen Näherungswert

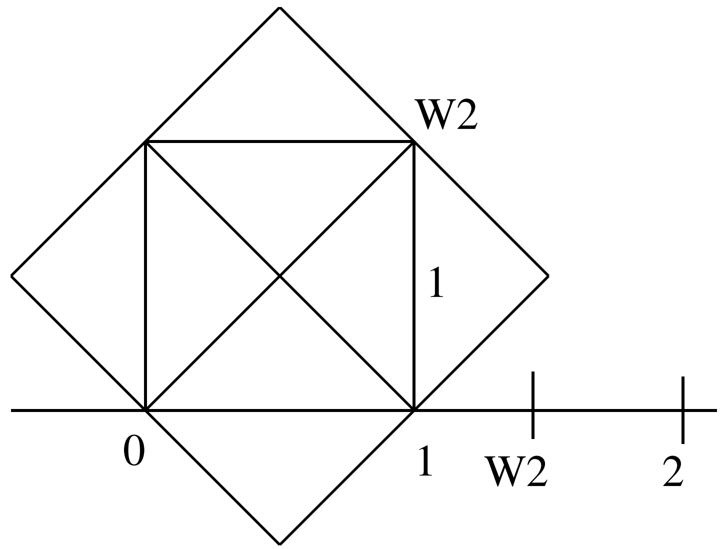
Näherungsverfahren:

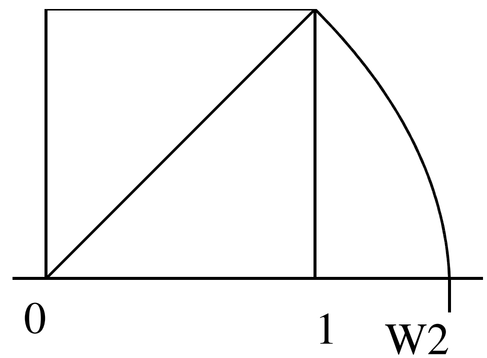
- Quadrierverfahren: $a^2 < p < b^2$
- Halbierungsverfahren: Intervallmitte als neuer Wert
- Heron-Algorithmus

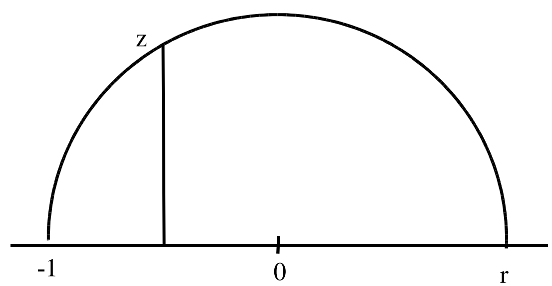
Lernziele:

- schrittweise Näherung, konvergierende Folge
- Algorithmen, Rekursionsformel
- Genauigkeit, Rechenzeit

c) Konstruierbarkeit







d) Rechenregeln/Verknüpfungseigenschaften

Dezimalbrüche: unendlich, gewohnte Algorithmen greifen nicht

$\rightarrow$ Längenmodell

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division entsprechend $\mathbb{Q}$.

Wurzelziehen bei positiven Zahlen möglich.

Potenzieren:

5	Potenzieren
7	negative Exponenten?
10	gebrochene Exponenten
11-13	Vertiefung

e) π und die Transzendenz

keine algebraische Zahl, d. h. Lösung einer algebraischen Gleichung
$\rightarrow$ Quadratur des Kreises unmöglich

Näherungswege:
geometrisch: ein-, umbeschriebene regelmäßige Vielecke
(1597, 2^{30}-Eck, 15 Dezimalen)
analytisch: Reihen

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}, \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} ...$$

Hypothese: Die Dezimalen von π sind eine Zufallsfolge

f) Komplexe Zahlen

Motivation: $x^2 + 1 = 0$

Lösen quadratischer Gleichungen

G. Cardano (1545), R. Bombelli (1572): *quantitas sophistica*
A. Girard (1629): *solutions impossibles*
R. Descartes (1637): *racines relles et imaginaires*
C. F. Gauß (1831): *numeri complexi*

Komplexe Zahlenebene

Algebraunterricht historisch

Cossisten (16. Jh.): Bücher auf Latein; Lösungsformeln für Gleichungen

L. Euler: *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770); Zahlenrechnen und Lösungsformeln für Gleichungen

	Schulen	Universitäten
E. 19. Jh.		Lösung von Gleichungen
1905	*Meraner Vorschläge*: Funktionsbegriff *Erlanger Programm*: Gruppen	Theorie der algebraischen Strukturen
		Bourbaki: axiomatische Methode
1959	*New Thinking in Mathematics*: algebraische Strukturen und axiomatische Methode; KMK 1968	
1970er	Abschwächung der Axiomatik, Stärkung der Anschauung; Leitidee: Verstehen durch den Schüler	
2000	PISA! Schwachpunkte: Üben formaler Fähigkeiten, Schwierigkeiten mit Formelsprache, fehlende Anwendungskompetenz	Computer, Geometrie

Auswahl der Inhalte

Gültigkeit:

gültige Begegnung mit der Mathematik:
neue Inhalte oder Methoden in der Mathematik hinsichtlich ihre Auswirkungen im Mathematikunterricht überdenken,
fachlich authentischer MU

Angemessenheit:

Aufarbeitung der Inhalte und Differenzierung

Wert:

für Mathematik: Leitbegriffe der Mathematik

für (Allgemein)Bildung: Ausbildung Denkfähigkeit bis Anwendung Alltag

4) Rationale Zahlen

a) Einführung

Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

$$(a, b) \cong (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Äquivalenzklassen:

$$\overline{(a, b)} := \{(x, y)|(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \wedge (x, y) \cong (a, b)\}$$

Repräsentation des Bruchs $\overline{(a, b)}$ durch $\frac{a}{b}$ oder Dezimalzahl.

Einbettung der ganzen Zahlen $z \in \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ durch $\overline{(z, 1)}$.

b) Rechenregeln

Addition:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$

Multiplikation:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$$

Satz: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen
zusammen mit der oben definierten Addition und Multiplikation
ist ein Körper.

c) Anordnung

Kleinerrelation:

$$(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow a \cdot b \cdot d^2 < c \cdot d \cdot b^2$$

Dichte: Für alle $r, s, \in \mathbb{Q}$ mit $r < s$ lässt sich immer ein $t \in \mathbb{Q}$ angeben mit $r < t < s$.

d) Zugänge/Konzepte für Brüche

Größenbereich, Zustand:

Bekannten Zahlen reichen als Maßzahlen für Strecken nicht aus.
Z. B. B mit A messen: B=nA bzw. A=$\frac{1}{n}$B
Bruchteile/zahlen beziehen sich auf ein (immer anderes) Ganzes.

Bruch als Zustand, d. h. das Ganze ist nicht bewusst.
Z. B. Viertel Butter, Achtel Rotwein, Dreiviertel Vier

Operatoren;

Abbildung/Operator: $\langle n\rangle : G \to nG$
Umkehrabbildung: $\langle n\rangle^{-1} : G \to \frac{1}{n}G$ (Stammbrüche)
Verkettung: $\langle m\rangle \circ \langle n\rangle^{-1} : G \to \frac{m}{n}G$

e) Zugänge/Konzepte für Brüche

Quotient/Erweiterungsbereich:

Ausgehend von $\mathbb{N}$ Zahlbereich suchen, in dem Division immer möglich.

Darstellung auf Zahlenstrahl:

0								1								2
				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{2}$				$\frac{3}{2}$				$\frac{4}{2}$
		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{4}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{4}$		$\frac{5}{4}$		$\frac{6}{4}$		$\frac{7}{4}$		$\frac{8}{4}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{16}{8}$

Verhältnisangabe

$\frac{3}{4}$m — Strecke steht zum Meter im Verhältnis 3 zu 4.

Drei Viertel der Äpfel sind faul.
75 Prozent der Äpfel sind faul.

Vorsicht: Mische Apfelsaft und Sprudel im Verhältnis 3 zu 4.

f) Vermittlung der Konzepte — $\frac{3}{4}$

Teil eines Ganzen/Anteil:
Torte oder Pizza: in vier gleiche Teile teilen, davon drei Stücke.

Operator:

Quotient:
3 Tafeln Schokolade werden an vier Kinder verteilt. Jede Tafel teilt man in vier gleich große Stücke und gibt jedem Kind drei.

g) Bruchrechnung

Erweitern und Kürzen: Teil eines Ganzen; Erweitern als Verfeinerung, Kürzen als Vergröbrung der Einteilung.

Addition und Subtraktion: gleichnamig über Größenkonzept, 3 Achtel plus 2 Achtel sind 5 Achtel;
ungleichnamig: vorher gleichnamig machen

Multiplikation und Division: Operatorenkonzept

h) Probleme

- seltener als natürliche Zahlen
- Schreibweise komplizierter
- viele Darstellungsweisen für eine Zahl
- Begriffsvielfalt, Konzepte
- das Ganze, die Bezugsgröße
- wenig konkretes Handeln, zu wenig Veranschaulichungsmodelle auf ikonischer Stufe, zu frühe Abstraktion (Operationen mit Bruchzahlen)

Sätze

Regeln, Formeln, Verfahren, Kalkül — Sätze?

Existenzsätze: Lösungen linearer Gleichungen

Finden einer Formel: Summenformel

Verallgemeinern einer Formel: Binomischer Lehrsatz

Beweise

Mathematisch: endliche Folge von Aussagen, verbunden durch logische Schlüsse (direkter Beweis, indirekter Beweis)

Schule: Beweis als soziomathematische Norm
generische, diagrammatische, verbale Beweise

Voraussetzungen:
Erkennen der Beweisbedürftigkeit
Bewusstsein der Hierarchie von Einsichten
Formalisierungsfähigkeit
Kenntnis logischer Regeln
Heuristische Fähigkeiten

Programm:

II. Gleichungen

1) Nutzen und Zweck
2) Gleichungstypen
3) Operieren mit Gleichungen
4) Vernetzung innerhalb des Mathematikunterrichts
5) Gleichungslehre 5-10

1) Nutzen und Zweck

Motivation für Zahlbereichserweiterung

Motivation für mathematische Erkenntnis (Geschichte)

- immer Thema
- Verallgemeinern, Formalisieren der Lösung
- Zahlbereiche
- Eröffnung neuer mathematischer Bereiche

Schule?

Gleichungen in den Schulstufen

1		Gleichheitszeichen
2	Rechne: $3+5=x, 6+x=8$	Zahlen bestimmen
3		
4		
5	Gegenaufgabe zu $6+x=8$	einfache Gleichungen lösen
6		Bruchgleichungen; Zahlbereichserweiterung
7		Termumformungen; Äquivalenzumformungen
8		Funktionsbegriff: linear, quadratisch
9		
10		

2) Gleichungstypen

- Gleichungen und Ungleichungen
- Gleichungen mit gebundenen Variablen: in Sätzen oder Aussagen
  Bsp. $\forall a, b \in \mathbb{N} : a + b = b + a$
- Bestimmungsgleichungen: eine ungebundene Variable/Unbekannte
  Bsp. $3x + 4 = 7$
- Parametergleichungen: bekannte Größen (Parameter) und Unbekannte
  Bsp. $u = 2\pi r$
- lineare, quadratische, kubische Gleichungen, Gleichungen n-ten Grades
- Wurzelgleichungen, Exponential-, Logarithmusgleichungen
- Bruchgleichungen, komplexe Gleichungen
- Gleichungssysteme

3) Operieren mit Gleichungen: a) Lösen von Un/gleichungen

Lösungen: Zahlen, deren Einsetzen eine wahre Aussage ergibt; Lösungsmenge; Probe

Variablen/Grundbereich (größter bekannter?)

Einsetzen, systematisches Probieren

Rückwärtsschließen

Schließen unter Benutzung von Veranschaulichungen

graphisches Lösen

Lösungsformeln für quadratische, kubische, biquadratische Gleichungen;

bei Gleichungen n-ten Grades: Polynomdivision

Näherungsverfahren (durch Iteration); z. B. Intervallhalbierungsverfahren

3) Operieren mit Gleichungen: b) Äquivalenzumformungen

Formulieren von Rechengesetzen: an Zahlenbeispielen und Variablen; Rechenregeln für Bruchzahlen

- Ordnen
- Zusammenfassen
- Seiten vertauschen [Relationszeichen verändern]
- Addition/Subtraktion der gleichen Zahl/des gleichen Terms (!) auf beiden Seiten; z. B. quadratische Ergänzungen
- Multiplikation beider Seiten mit der gleichen Zahl/dem gleichen Term (!) [negative Zahl: Relationszeichen ändern]
- Division beider Seiten durch die gleiche Zahl ($\neq 0$)/ den gleichen Term (!) [negative Zahl: Relationszeichen ändern]
- Quadrieren beider Seiten [Achtung, keine Äquivalenzumformung!]
- Logarithmieren

3) Operieren mit Gleichungen: c) Gleichungssysteme

Gleichsetzungsverfahren

Einsetzungsverfahren

Additionsverfahren

graphisches Lösen

Wieviele Lösungen?

3) Operieren mit Gleichungen: d) Formeln/Gleichungen aufstellen

Formeln für geometrische Figuren (z. B. Flächeninhalt Rechteck) aufstellen

Interpretation einer Formel: Abhängigkeiten, Verlauf, inhaltliche Grundlage

Auflösen einer Formel nach einer Variablen

Einsetzen von Größen in eine Formel

4) Vernetzung innerhalb des Mathematikunterrichts

Blick in die Bildungsstandards

Zahl

- mit Variablen als typisch mathematischem Element umgehen und arbeiten
- die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen an Beispielen begründen
- Rechengesetze

natürliche Zahlen, Brüche	*ganze, rationale Zahlen*	*reelle Zahlen*
	Term-, Äquivalenzumformungen	*Termberechnungen*
	binomische Formeln	*Formeln: inhaltliches Verständnis und Variation*
	lineare Gleichungen	*quadratische Gleichungen*

Bildungsstandards (Fortsetzung)

Modellieren/Funktionaler Zusammenhang

- mit dem Gleichheitszeichen korrekt umgehen
- Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt untersuchen und Aussagen dazu machen

einfache Gleichungen *lineare Funktionen* *quadratische Funktionen*
Dreisatz

4) Vernetzung innerhalb des Mathematikunterrichts

a) Zahl

Eigenschaften von Zahlen in Gleichungen formulieren: $a + b = b + a$

Operation und Gegenoperation: $a + b = c$ und $c - b = a$

Formulieren von Rechengesetzen an Zahlenbeispielen und Variablen

4) Vernetzung innerhalb des Mathematikunterrichts

b) Terme: auf beiden Seiten des (Un)Gleichheitszeichens

- Ordnen
- Zusammenfassen
- Seiten vertauschen [Relationszeichen verändern]
- Addition/Subtraktion der gleichen Zahl/des gleichen Terms (!) auf beiden Seiten; z. B. quadratische Ergänzungen
- Multiplikation beider Seiten mit der gleichen Zahl/dem gleichen Term (!) [negative Zahl: Relationszeichen ändern]
- Division beider Seiten durch die gleiche Zahl ($\neq 0$)/ den gleichen Term (!) [negative Zahl: Relationszeichen ändern]
- Quadrieren beider Seiten [Achtung, keine Äquivalenzumformung!]
- Logarithmieren

4) Vernetzung innerhalb des Mathematikunterrichts

c) Funktionen

Lösungen: Zahlen, deren Einsetzen eine wahre Aussage ergibt $\leftrightarrow$ Nullstelle
Abhängigkeit der Variablen voneinander

Einsetzen, systematisches Probieren

Schließen unter Benutzung von Veranschaulichungen

graphisches Lösen

Lösungsformeln für quadratische, kubische, biquadratische Gleichungen

Näherungsverfahren (durch Iteration); z. B. Intervallhalbierungsverfahren

4) Vernetzung innerhalb des Mathematikunterrichts

d) Formeln und Sachaufgaben

Formeln für geometrische Figuren (z. B. Flächeninhalt Rechteck) aufstellen

Interpretation einer Formel: Abhängigkeiten, Verlauf, inhaltliche Grundlage

Auflösen einer Formel nach einer Variablen

Einsetzen von Größen in eine Formel

Sachaufgaben:
- Terme gewinnen
- Relationen zwischen Termen
- Reihenfolge der Operationen

Schema, Skizze für Überblick über Sachverhalte

Sei S die Zahl der Studierenden und p die Zahl der Professoren einer Universität. Auf einen Professor kommen 6 Studenten.

5) Lehrgang Gleichungen

Stufe	Zahlen	Terme	Funktion	Gleichungen
5/6	$\mathbb{N}$	—	—	
7/8				
9/10				

5a) Themenstrang (Vorschlag für Bayern)

5. Klasse	$3x + 4 = 10$, $x \in \mathbb{N}$
6. Klasse	$1{,}2x + \frac{3}{5} = 4$, $x \in \mathbb{Q}$
7. Klasse	lineare UnGleichungen
8. Klasse	Bruchgleichungen, Gleichungssysteme
9. Klasse	quadratische Gleichungen, Wurzelgleichungen, Betragsgleichungen
10. Klasse	Potenzgleichungen, Exponentialgleichungen, trigonometrische Gleichungen

I. Zahlen

II. Gleichungen

III. Funktionen

IV. Terme

Programm:

III. Funktionen

1) Funktionsbegriff

2) Funktionstypen und ihre Anwendungen

3) Didaktik der Funktionen

4) Beispiel: Die quadratische Funktion

´

1) Funktionsbegriff

Beziehungen zwischen Zahlen bzw. zwischen Größen

Funktionen als grundlegendes "Werkzeug" : SII (Analysis)

einzelne Funktionen : SI (Proportionen, Antiproportionalität;
lineare, quadratische, Wurzelfunktionen;
Exponentialfunktion; Winkel/trigonometrische Funktionen)

Beziehungen zwischen / Abhängigkeit von Zahlen/Größen: ab PS (Dreisatz)

Definitionen:

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung zweier nichtleerer Mengen.

Eine Funktion ist eine rechtsseitige Relation.

2) Funktionstypen und ihre Anwendungen

a) Typen nach Zahlbereich bzw. Eigenschaften

reelle, rationale, transzendente, ganzrationale Funktionen

quadratische, trigonometrische, exponentielle Funktionen

stetige, differenzierbare, beschränkte Funktionen

injektive, surjektive, bijektive Funktionen

einstellige, mehrstellige Funktionen

Umkehrung, Zusammensetzung, Ableitung, Integration von Funktionen

Kurvendiskussion !

Bsp.:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

2) Gauß-Klammer [ ]:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. [$x$] bezeichnet die größte ganze Zahl $\leq x$.

3) Sägezahnfunktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s(x) = x - [x]$.

2) Funktionstypen und ihre Anwendungen

b) Darstellungsarten

Funktionsgleichung

Bsp.: $f(x) = x^2$

sp.: $x \mapsto x^2$

Graph

Graph einer Funktion $f : X \to \mathbb{C}$: $G(f) = \{(x, f(x))|x \in X\} \subset X \times \mathbb{C}$

Veranschaulichung durch Kurve im $\mathbb{R}^2$

$\to$ Wechsel der Präsentationsformen

2) Funktionstypen und ihre Anwendungen

c) Alltagsbeispiele

Badewannenfunktion etc.

d) Funktionen in der Geometrie

Kugel: $O(r) = 4r^2\pi$, $V(r) = 4r^3\pi$

Flächeninhalte ebener Figuren: $A(Quadrat) = s^2$, $A(Rechteck) = a \cdot b$

Abbildungen der Ebene auf sich:

3) Didaktik der Funktionen: Lehrgang "Funktionen"

Grunderfahrungen

Funktionseigenschaften

Operieren mit Funktionen

Funktionstypen

3) Didaktik der Funktionen: Lehrgang "Funktionen"

Grunderfahrungen

PS: Preise bestimmter Warenmengen; aufbauend auf Umwelterfahrung

5./6. Klasse: Multiplikation/Division: von der Einheit zur Vielheit, von der Vielheit zur Einheit
Ein Nagel wiegt 4 g. Wie viel g wiegen 600 Nägel dieser Sorte?

7. Klasse: Zusammenhang zwischen Größen thematisieren in Sachsituationen, verschiedene Präsentationsformen;
Schülerversuche: Gewicht von Nägeln in Abhängigkeit von der Stückzahl

Funktionseigenschaften

Operieren mit Funktionen

Funktionstypen

3) Didaktik der Funktionen: Lehrgang "Funktionen"

Grunderfahrungen

Funktionseigenschaften

Proportional $f(rx) = rf(x)$

Dreisatz: Schritt über die Einheit

Verhältnisgleichheit $\frac{x}{y} = \frac{f(x)}{f(y)}$

Quotientengleichheit/Proportionalitätsfaktor $\frac{f(x)}{x} = a, f(x) = ax$

Lineare Funktionen

$$f(x) = ax + b$$

konstant, wachsend, fallend

Operieren mit Funktionen

Funktionstypen

3) Didaktik der Funktionen: Lehrgang "Funktionen"

Grunderfahrungen

Funktionseigenschaften

Operieren mit Funktionen

Addition
Multiplikation
Verkettung
(Umkehrfunktion)

Funktionstypen

3) Didaktik der Funktionen: Lehrgang "Funktionen"

Grunderfahrungen

Funktionseigenschaften

Operieren mit Funktionen

Funktionstypen

Lineare Funktion $f(x) = ax + b$

Betragsfunktion, Treppenfunktion

Quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$

(Potenz-, Exponentialfunktion $f(x) = x^n, f(x) = a^x$)

(Trigonometrische Funktion)

4) Beispiel: Die quadratische Funktion

a) Erläutern Sie den Begriff quadratische Funktion und begründen Sie wichtige Eigenschaften.

b) Beschreiben Sie unterrichtliche Zugänge zur quadratischen Funktion und typische Anwendungen.

c) Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit, in der die rechnerische Lösung quadratischer Gleichungen erarbeitet wird.

4) Beispiel: die quadratische Funktion

Eigenschaften:

Funktionsgleichung $f(x) = x^2$, Graph: Parabel; symmetrisch

Streckungen, Stauchungen: $f(x) = a(x)^2$

Verschiebung entlang der y-Achse: $f(x) = x^2 + c$

Verschiebung entlang der x-Achse: $f(x) = (x + d)^2$

Scheitel: $f(x) = a(x)^2 + bx$

Einführung:

Quadrat, Seite und Flächeninhalt

Zahlenrätsel

Hänge/Brücken, Wurfparabel, Skateboardrampe

DIN-Papiere, Verhältnis der Seiten und Flächen

1) Variablen

veränderlich

Einzelzahlaspekt: beliebig, aber fest; Platzhalter

Bereichszahlaspekt: Repräsentant für ein Element einer Menge

Veränderlichenaspekt: funktionales Denken

2) Terme

Terme bestehen aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen

nach Regeln gebildet (Syntax)
international

nach Regeln umgeformt (Termunformungen)
Gedächtnisentlastung

Funktion: beschreiben mathematische Verhältnisse und Prozesse (Semantik)

Gleichungen, Funktionen

3) Einführung und Umgang

Einführung

Umweltbeispiele
Tabellen
mathematische Beispiele

Umgang

syntaktische Regeln thematisieren
Interpretation von Termen/Formeln
Umformungen

Schwierigkeiten

Trennung von Syntax und Semantik $\rightarrow$ Spiel mit Buchstaben
stupides Üben, Aufgabendrill
Bezeichnungen: Variable, Veränderliche, Unbekannte, un/gebundene Variable
fehlender Umweltbezug