

# Algebra

Barbara Schmidt-Thieme

26. August 2005

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Gruppen — Strukturen der Mathematik</b>	<b>2</b>
1.1	Beispiele, die uns begleiten werden . . . . .	2
1.2	Grundlegende Definitionen . . . . .	2
1.2.1	Mengen . . . . .	2
1.2.2	Abbildungen und Funktionen . . . . .	2
1.2.3	Relationen . . . . .	2
1.3	Gruppe . . . . .	2
1.4	Zyklische Gruppen . . . . .	2
1.5	Darstellung von Gruppen . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Gruppen — Sätze und Typologien</b>	<b>3</b>
2.1	Struktur einer Gruppe . . . . .	3
2.1.1	Untergruppen . . . . .	3
2.1.2	Nebenklassen . . . . .	3
2.2	Strukturerhaltende Abbildungen . . . . .	3
2.2.1	Isomorphie . . . . .	3
2.2.2	Homomorphismen . . . . .	3
2.2.3	Faktorgruppen . . . . .	3
2.3	Endliche Gruppen — Übersicht . . . . .	3
2.4	Deckabbildungen . . . . .	3
2.4.1	Quadrat . . . . .	3
2.4.2	Zerlegungen . . . . .	3
2.4.3	Körper . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Strukturen mit 2 Verknüpfungen</b>	<b>4</b>
3.1	Ringe und Körper . . . . .	4
3.1.1	Definition . . . . .	4
3.1.2	Teiler im Ring . . . . .	4
3.1.3	Polynomringe . . . . .	4
3.2	Quotientenkörper . . . . .	4
3.3	Algebraische Gleichungen . . . . .	4
3.4	Konstruktion mit Zirkel und Lineal . . . . .	4

# 1 Gruppen — Strukturen der Mathematik

## 1.1 Beispiele, die uns begleiten werden

A Geometrie: Deckabbildungen ebener Figuren; Kongruenzabbildungen der Ebene, des Raumes (s. Quadrat)

B Restklassen: wie mod 4 und in Übung noch weitere gemacht;  
dabei: Struktur Drehgruppe Quadrat und  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  von der Struktur her gleich; erzeugendes Element;  $\mathbb{Z}$ : zyklisch, zur Ordnung teilerfremd;  
andere mit 4 Elementen: kleinsche Vierergruppe (Rechteck),  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$   
es gibt auch unendliche Gruppen,  $\mathbb{Z}$

C Zahlbereiche:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$  usw.

D Funktionen, insbesondere Polynome, Permutationsgruppen

E Weitere: Matrizen, Knoten, ...

## 1.2 Grundlegende Definitionen

### 1.2.1 Mengen

Bsp.; Def nach Cantor; Schnitt usw., Def: kartesisches Produkt

### 1.2.2 Abbildungen und Funktionen

Def Abbildung, Funktion als Teilmenge des kartesischen Produktes...

### 1.2.3 Relationen

Def: Eine Teilmenge des kartesischen Produktes  $M \times M$  einer Menge  $M$  heißt *Relation*  $R$  in  $M$ .  $R \subseteq M \times M$

Bsp:  $\mathbb{N}$  und kleiner, kleinergleich, teiler;

Kongruenz zweier ebener Figuren

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ist Äquivalenzrelation mit  $(a, b) \cong (c, d) \leftrightarrow ad = bc$ .

Restklassen

## 1.3 Gruppe

Definition, Beispiele (allg. mit drei Elementen,  $(\mathbb{Q}, \cdot)$ , Restklassen)

Untergruppe, Beispiele  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{Z}, +)$ , Restklassen mod 6 und mod 3, Deckabbildungen Quadrat und Drehungen)

Ordnung einer Gruppe

## 1.4 Zyklische Gruppen

Definition, erzeugendes Element, Kommutativität

## 1.5 Darstellung von Gruppen

Menge und Verknüpfung, Gruppentafel, Erzeugende

# 2 Gruppen — Sätze und Typologien

## 2.1 Struktur einer Gruppe

### 2.1.1 Untergruppen

Untergruppenkriterium; Durchschnitt, Vereinigung, Transitivität

### 2.1.2 Nebenklassen

Definition; Beispiele; Nebenklassen bilden Zerlegung der Gruppe; Satz von Lagrange

## 2.2 Struktur erhaltende Abbildungen

### 2.2.1 Isomorphie

Definition

### 2.2.2 Homomorphismen

Definition; Sätze: Kern ist Untergruppe

### 2.2.3 Faktorgruppen

Definition; Beispiel (Drehungen Sechseck, Restklassen mod 6); Homomorphiesatz für Gruppen

## 2.3 Endliche Gruppen — Übersicht

Isomorphieklassen; Primzahlordnung, dann zyklisch; Ordnung 8:  $Z_8, Z_4 \times Z_2, Z_2 \times Z_2 \times Z_2, D_4$ , Quaternionen

## 2.4 Deckabbildungen

### 2.4.1 Quadrat

Diedergruppen

### 2.4.2 Zerlegungen

Definition Zerlegung/Parkett

### 2.4.3 Körper

Tetraeder, Würfel, reguläre Polyeder

## 3 Strukturen nmit 2 Verknüpfungen

### 3.1 Ringe und Körper

#### 3.1.1 Definition

Definition Ring und Körper; Beispiele  $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ ; Null- und Einselemente

#### 3.1.2 Teiler im Ring

Nullteiler, Beispiele  $(\left(\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}, +, \cdot\right)$ , Matrizen, reellwertige Funktionen); prime Elemente

#### 3.1.3 Polynomringe

Definition Polynom, Addition, Multiplikation

### 3.2 Quotientenkörper

$\mathbb{Q}[X]$  zum Körper machen durch Polynomdivision  $\frac{p(x)}{q(x)}$ ; Konstruktion eines Quotientenkörpers am Beispiel  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{Q}$

### 3.3 Algebraische Gleichungen

Defintion, Lösung einer Gleichung/Nullstellensuche; Zerlegung in Linearfaktoren; Fundamentalsatz der Algebra

### 3.4 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Körpererweiterung; algebraisch, transzendent;

Klassische Probleme der Geometrie und ihre Lösungen (Quadratur des Kreises, Würfelerdoppelung, Dreiteilung Winkel, regelmäßige Polygone)