Sebastian Kuntze

Beweisen im Geometrieunterricht – wie genau nehmen es unsere Schulbücher damit?

Sinnvolle Genauigkeit beim Beweisen im Geometrieunterricht

Genauigkeit beim Beweisen – im ersten Moment denkt man an Strenge, formale Präzision, logische Lückenlosigkeit der mathematischen Argumentation. Dies ist zweifellos ein wichtiges Lernziel, wenn Schülerinnen und Schüler an das Beweisen herangeführt werden.

Die Frage nach der Genauigkeit beim Beweisen wirft zweitens – gerade bei der Einführung in geometrisches Beweisen – grundsätzlich die Frage nach den Fundamenten auf, auf die sich Argumente abstützen lassen. Diese Fundamente, d.h. Begriffe, Axiome, bewiesene Sätze und einige grundlegende Elemente der Logik, sollten

- in ihrer jeweiligen Rolle für das Beweisen von den Schülerinnen und Schülern[1] erkannt werden,
- als Wissensbestände abrufbar sein und schließlich
- möglichst souverän eingesetzt werden können.

Betrachtet man Beweise als in einem Kommunikationsprozess vorkommende Argumentationen, so fällt auf, dass Genauigkeit beim Beweisen im Mathematikunterricht auch noch eine dritte Bedeutungskomponente hat: Wie Beweisideen, Beweisskizzen oder in Fachzeitschriften veröffentlichte Beweise zwischen Mathematikern ausgetauscht werden, kann sich jeweils hinsichtlich der Genauigkeit der Begründungsweisen sehr stark unterscheiden, was oft eine Frage der Ausführlichkeit ist.
Auch die Art und Weise, wie neue mathematische Beweise entstehen, kann als Annäherungsvorgang an eine möglichst präzise Darstellung mathematischer Ideen aufgefasst werden.
Für den Mathematikunterricht wird das Ziel vorgegeben, dass die Schüler eine Vorstellung davon entwickeln, welche Rolle Beweise in der Mathematik spielen. Dann können die Schüler auch besser einschätzen, was sie tun, wenn sie einen Beweis führen und auch, was sie dabei *tun müssen*.
Andererseits sollten die Schüler wissen, was sie *tun können*, wenn sie vor dem großen Hindernis „Beweisaufgabe“ stehen. Die Beobachtung, dass ein Beweis nicht nur ein fertiges, unverrückbares Produkt ist, sondern in einem langen Prozess des Sammelns, Testens und fortschreitenden Zusammensetzens von einzelnen Gesichtspunkten und Argumenten herausgearbeitet wird, könnte die Aufmerksamkeit auch im Rahmen der schulischen Möglichkeiten darauf lenken, wie ein „Beweis“ entsteht. Seine Genauigkeit wird dabei nicht als statisch vorgegeben, sondern als steigerungsfähig und dynamisch erlebt.

In dieser dreifachen Bedeutung soll Genauigkeit beim Beweisen im Geometrieunterricht verstanden werden, wenn im Folgenden nach einer „sinnvollen Genauigkeit“ bei Beweisen im Mathematikunterricht gesucht wird.

Bevor unter diesem Blickwinkel Schulbücher untersucht werden, sollen in den folgenden Abschnitten einige allgemeinere Gesichtspunkte, die mit „sinnvoller Genauigkeit“ beim Beweisen, Begründen und Argumentieren in Lehrwerken und dem Mathematikunterricht zu tun haben, angesprochen werden.

1. Orientierung an der Wissenschaft Mathematik

Die Wissenschaft Mathematik ist stark von ihrem spezifischen Beweisbegriff, der als Standard für Begründungs- und Argumentationsprozesse fungiert, geprägt. Der mathematische Beweisbegriff unterscheidet die Mathematik von allen anderen Disziplinen der Wissenschaft.
Das führt dazu, dass sich das Thema „Beweisen, Begründen, Argumentieren“ im Mathematikunterricht in erster Linie an innermathematischen Gegebenheiten orientieren wird. So bezieht sich das Lernziel „erkennen und verstehen, was ein mathematischer Beweis ist und wozu er dient“ auf einen Begriff der Wissenschaft Mathematik, der anders als viele Lerninhalte des Curriculums wohl kaum in außermathematischen Anwendungen erlebbar ist.

[1] Im Folgenden wird der besseren Lesbarkeit halber der Plural „die Schüler“ verwendet. Schülerinnen sind dabei natürlich immer mit angesprochen.

2. Die besondere Natur mathematischer Beweise – im Vergleich mit Argumentations- und Begründungsschemata anderer Disziplinen

Der Themenbereich „mathematischer Beweis“ im Mathematikunterricht bezieht sich, wie bereits oben festgestellt, auf innermathematische, von der Wissenschaft geprägte Vorstellungswelten, was den Anwendungsbezug dieser mathematischen Inhalte stark erschwert, wenn nicht gar völlig verhindert. Es gibt aber sichtbare und von Schülern nachvollziehbare, außermathematische Argumentationskonzepte. Ein solches konkurrierendes Konzept ist das des (juristischen) Beweises im Strafprozess. Hier gilt für alle entscheidungserheblichen Tatsachen eine Inquisitionsmaxime des Gerichts, das die Beweise letztlich in Form eines Wahrscheinlichkeits- oder Plausibilitätsurteils würdigt. Das Gesetz regelt die Art der Beweiserhebung und spricht Beweiserhebungs- bzw. Verwertungsverbote aus. Durch diesen Kontrast zum Beweisen in der Mathematik kann den Schülern auf lebendige Weise deutlich werden, was mathematisches Begründen charakterisiert.

3. Bewusstsein des Transports mathematischer Weltbilder im Mathematikunterricht

Das Verhältnis zwischen den Schülern und der Wissenschaft Mathematik wird beeinflusst von überdauernden Vorstellungen, die die Schüler von der Mathematik haben. TÖRNER und GRIGUTSCH [12] sprechen in diesem Zusammenhang von mathematischen Weltbildern bzw. „mathematical beliefs“. In einer Untersuchung von TÖRNER und GRIGUTSCH mit Studienanfängern wurde beispielsweise erhoben, ob Mathematik eher als fertiges System aus Begriffen, Fakten, Formeln, als Werkzeugkasten und Formelpaket, als streng deduktiv durch formale Logik charakterisiertes abstraktes System, oder aber auch als aus prozessartigen Komponenten zusammengesetzt gesehen wird. TÖRNER und GRIGUTSCH äußern die naheliegende Vermutung, dass mathematisches Handeln der Schüler von ihren mathematischen Weltbildern beeinflusst wird. Lehrer und Schulbuchautoren sollten sich daher die Frage stellen, welche mathematischen Weltbilder durch ihren Unterricht bzw. durch das Schulbuch transportiert werden.
Von Interesse wäre es beispielsweise, ob vermittelte mathematische Weltbilder speziell zum Themenumfeld „Mathematischer Beweis“ eher bestimmt werden von einem statischen Beweisbild, vielleicht gar Vorstellungen von einem Baukastencharakter geometrischer Beweise, oder ob auch dynamische Aspekte von den Schülern gesehen werden können, beispielsweise des Sich-Entwickelns von Beweisen im Zusammenhang mit der Weiterentwicklung mathematischen Wissens selbst.

4. Betonung dynamischer Prozesse beim Beweisen - Entwicklungsbetonung

Haben die Schüler ein eher prozessorientiertes Bild vom Beweisen in der Mathematik, so ist zu vermuten, dass sie auch eine höhere Selbstwirksamkeit beim Argumentieren in mathematischen Kontexten erleben. Mit welchen Vorstellungen kann ein solches prozessorientiertes Beweisverständnis beschrieben werden?
BOERO gibt in [1] ein Modell an, das helfen kann, das „Phänomen mathematischer Beweis“ zu erhellen. Er nennt sechs Phasen der Entwicklung von Beweisen durch die „Experten“, d.h. durch die Mathematiker:

- Die erste Phase bildet die Exploration der Problemstellung. Während dieser Erkundungs- und Orientierungsphase wird eine Vermutung („Hypothese“) entwickelt und mögliche Argumente dafür gesucht und erkannt.
- In der zweiten Phase wird die gewonnene Hypothese gemäß der jeweiligen mathematischen Konventionen formuliert.
- Diese nunmehr formal fassbare Hypothese wird in der dritten Phase ebenso erkundet wie mögliche Argumentverknüpfungen.
- Die vierte Phase besteht in einer Auswahl von Argumenten und deren Verbindung und Anordnung in einer Kette von Deduktionsschlüssen.
- Erst in der fünften Phase werden die Argumente so niedergelegt, dass ein Beweis entsteht. Da sich BOERO auf die Entwicklung eines Beweises durch die „Experten“ bezieht, soll der in dieser Phase erarbeitete Beweis mathematischen Standards (z.B. der Publikation) entsprechen.
- In einer sechsten Phase kann der Beweis einem formalen Beweis angenähert werden.

Zu den Phasen ist anzumerken, dass das Modell BOEROs nicht als linearer Prozess gemeint ist, sondern einzelne Phasen sehr lange dauern oder aber entfallen können. Auch ein wiederholtes Durchlaufen einzelner Phasenabfolgen ist möglich.

Auffällig ist an BOEROs Modell, dass ein großer Teil der Tätigkeiten bei der Entwicklung des Beweises in ein Problem erkundenden, untersuchenden Denk- und Kommunikationsprozessen besteht. Das Produkt des fertigen Beweises steht erst ganz am Ende eines längeren Prozesses.
Ein solches Bild vom Beweisen, das die Entwicklung und nicht das Ergebnis oder gar Rezepte betont, hat der Verfasser in keinem der untersuchten Lehrbücher gefunden. Gelegentlich werden zwar Tipps für Beweisaufgaben gegeben, die einzelnen der Phasen zugeordnet werden können. Eine Sensibilisierung der Schüler, dass unter Umständen auch bei einfacheren geometrischen Beweisen ein mehrfaches Sichten und Weiterentwickeln von Argumenten erforderlich sein kann, unterbleibt in der Regel. Dies hätte vermutlich die Frustrationstoleranz der Schüler erhöhen können, auch nicht direkt zum Ziel führende Betrachtungen anzustellen, bevor ein fertiger Beweis gefunden wird. Ebenso wenig geben die Schulbücher einen Überblick, wie in der (wissenschaftlichen) Praxis Beweise entstehen. Dies wäre mit relativ wenigen Worten möglich.

5. Betonung der Abhängigkeit des Beweisens von sozialen, auch historischen Kontexten

Anforderungen an Genauigkeit und Strenge in der Mathematik haben sich bekanntlich im Laufe der Zeit verändert. So stellte beispielsweise WEIERSTRAß in der Differentialrechnung andere Anforderungen an Beweise als etwa NEWTON. Eine Neuformulierung von Beweisen, die NEWTONs Zeitgenossen überzeugt hatten, wurde nötig.
Auch adressatenbezogen gibt es offenbar unterschiedliche Gebräuchlichkeiten hinsichtlich der Genauigkeit, in der ein Beweis dargelegt wird. Nimmt man noch hinzu, dass untermauerte Zweifel daran bestehen, ob es so etwas wie einen vollkommenen Beweis überhaupt geben kann, oder dass gestritten wurde und wird, ob beispielsweise Computerbeweise als vollwertige mathematische Argumentationen akzeptiert werden können, so erscheinen auch die „Endprodukte" der von BOERO beschriebenen Entwicklungsprozesse in einem etwas relativierenderen Licht.
Auf Aspekte wie diese gründen WITTMANN und MÜLLER [13] die Forderung, das Beweisen im Klassenzimmer so zu gestalten, dass die anwesenden Menschen gleichsam ein Gremium von Mathematikern darstellen, die über Richtigkeit und notwendige Genauigkeit gemeinsam erarbeiteter, inhaltlich-anschaulicher Beweise entscheiden.
Für die Darstellung in Schulbüchern könnten diese Gesichtspunkte dazu ermutigen, etwas weniger formal-symbolsprachliche Akzente zu setzen, sondern öfter mit sprachlichen Mitteln zentralen mathematischen Gedankengängen Ausdruck zu verleihen.
Klare Verabredungen, was die jeweils gültige, gemeinsame Argumentationsbasis sein soll, sollten die Grundlage dafür schaffen, dass die Schüler zunächst sprachlich, dann, wenn erwünscht, auf formaleren Ebenen gültige Argumente austauschen können. Das Buch [27] geht mit der Aufstellung des jeweils zulässigen „Satzvorrats" in diese Richtung.

Damit ist ein Einstieg in die Diskussion der Darstellung des Themas „Beweisen" in der Schulbuchliteratur gemacht. Beginnen wir jedoch mit einem kurzen Überblick.

Darstellungen zum Beweisen in Schulbüchern

Wie genau sollte es der Geometrieunterricht mit dem Beweisen nehmen? Dies ist eine Frage, auf die im Laufe der Zeit Schulbücher mit immer wieder anderen Akzentsetzungen geantwortet haben.
So wurde bis in die Nachkriegszeit und das Folgejahrzehnt hinein in den Schulbüchern eine Geometrie der „Grundsätze", „Lehrsätze" und schließlich auch der Beweise verfolgt (z.B. RENNER [28], TELLER &NIKOL [39]), die auf manchen Schüler trocken gewirkt haben mag. Die Schulbücher verwendeten in der Form eine äußerlich exakte, wissenschaftsorientierte Darstellung, oft ohne die Schüler in die Bedeutung dieser Darstellung einzuführen. Was ein „Grund- oder Lehrsatz" wirklich ist, was „Beweisen" bedeutet, wird zumindest in den Schulbüchern bestenfalls in wenigen Sätzen oder in Fußnoten gesagt. Auswendiglernen ohne tieferes Verständnis könnte eine Vermeidungs- und Bewältigungsreaktion einiger Schüler gewesen sein.

In der Zeit der „New Maths" mit ihrer Betonung formaler Zusammenhänge finden sich unterschiedliche Konzeptionen im Aufbau von Lehrwerken. Das Thema Beweisen wird in den Schulbüchern oft aufgeteilt und je nach Stoffaufbau und Bedarf eingestreut. Dadurch dürfte, im Vergleich zu Lehrwerken, die ein Kapitel zum Thema Beweisen vorsehen, ein Überblick für die Schüler, beispielsweise darüber, welche Eigenschaften mathematische Beweise haben, welche Beweisverfahren es gibt etc., verloren gegangen sein (z.B. ANDELFINGER [14], ERNST [17], ERNST [18], FABER [19], HOFFMANN [20], ROTH & STINGL [29], SCHRÖDER & UCHTMANN [35]).
Offenbar zum Zwecke der Prüfbarkeit von geometrischen Beweisaufgaben und deren Training wurden Lehrprogramme entwickelt (ROTH & STINGL [29], auch in ROTH & STINGL [30]), die sich zwar um eine Verbesserung der Beweiskompetenzen der Schüler bemühen, die Perspektive aber auf zu übende geometrische Beweisverfahren und -algorithmen (Winkelberechnungsbeweis, Symmetriebeweis, Kongruenzbeweis) verengen. Die Schüler

füllen arbeitsblattartige Lückenbeweise in Analogie zu bereits vorgestellten Beweisen aus, ohne genauer gesagt zu bekommen, von welcher Natur mathematisches Argumentieren ist und welche Rolle es in der Mathematik spielt.

In gegenwärtig noch gültigen Lehrplankonzeptionen, wie beispielsweise dem bayerischen Lehrplan ([41], [42]) gibt es in der 8. Jahrgangsstufe ein mit der Viereckslehre verquicktes Schwerpunktkapitel zum Thema Beweisen[2]. Hier begegnen die Schüler einer Stoffeinheit, die unter anderem Elemente logisch formalen Denkens, verschiedene Beweisverfahren und die Umkehrung von Sätzen thematisiert. Es dürfte sich bei dieser Lehrplaneinheit um eine Art Gelenkstelle für Schülervorstellungen zum mathematischen Beweisen handeln.
In den aktuellen Schulbüchern fällt die Behandlung des Bereichs „Beweisen, Begründen, Argumentieren" innerhalb dieser Lehrplaneinheit recht unterschiedlich aus. Eine eigene Untersuchung[3] ergab große Unterschiede in der Auswahl der angesprochenen Einzelthemen, der inhaltlichen Abfolge und der Art, der Qualität und dem Umfang der Aufbereitung. Einige ausgewählte Aspekte werden im Folgenden diskutiert.

Formale Genauigkeit und Symbolsprache versus Strategien schülergemäßer Simplifizierung

Die untersuchten Schulbücher schwanken oft zwischen zwei Extremen hin und her: Auf der einen Seite steht die Tendenz, im Bereich „Beweisen, Begründen, Argumentieren" formale Genauigkeit anzustreben. Dies wird oft durch eine starke Betonung mathematischer Symbolsprache – die bereits für sich genommen eine Schwierigkeit für die Schüler darstellen dürfte – unterstrichen. Es entsteht der Eindruck, dass dahinter oft ein Bild vom „absoluten, geradlinigen Beweis" in der Mathematik steht. Warum dieses Bild zweifelhaft und seine uneingeschränkte Vermittlung nicht das Ziel des Mathematikunterrichts sein sollte, wurde in der fachdidaktischen Literatur bereits eingehend diskutiert (siehe z.B. [2], [13], [10]). Gerade wenn die Betonung formal-symbolsprachlicher Elemente mathematisches Verstehen zu vernachlässigen und zu erschweren scheint, wird diese Art von Genauigkeit von Schulbuchbeweisen fragwürdig. Als besonders irreführend ist es anzusehen, wenn trotz genauer, formal-symbolischer Sprache manche Lehrbuchbeweise lückenhaft sind.
Die Betonung formaler Elemente beim Beweisen im Unterricht findet übrigens eine Entsprechung in Befunden der Untersuchung von HEALY und HOYLES [5], die so interpretiert werden können, dass die Lernenden Beweise in erster Linie nach dem Grad der formal-symbolsprachlichen Formulierung beurteilen[4].

Auf der anderen Seite findet man in Schulbüchern den Versuch, durch schülergemäße Vereinfachungen die Darstellung des Themas „Beweisen, Begründen, Argumentieren" abzukürzen. Der Wert der entsprechenden verallgemeinernden und beschreibenden Textpassagen dürfte für die Schüler von sehr eingeschränktem Erkenntniswert sein, da sie, anders als ihre Lehrer, nicht wissen können, was sich hinter diesen Formulierungen verbirgt[5]. Oft werden interessante Einblicke in wissenschaftliche Anforderungen und Vorgehensweisen der Mathematik geradezu vermieden.

Diese Gesichtspunkte sollen an drei Beispielen verdeutlicht werden:

---

[2] Zitat aus [42]:

> „**1 Vierecke: allgemeines Viereck, besondere Vierecke, Konstruktionen**
> (...) In diesem Abschnitt sollen verstärkt wesentliche Beweistechniken vermittelt werden. Die Schüler sollen schließlich in der Lage sein, Voraussetzung und Behauptung klar zu unterscheiden, einfache Beweise selbständig durchzuführen, Kehrsätze zu formulieren und deren Beweisbedürftigkeit einzusehen."

[3] Untersucht wurden insgesamt mehr als 25 Lehrwerke insbesondere der 8. Jahrgangsstufe. Für diese Schulbücher aus verschiedenen Jahrzehnten wurde eine Bestandsaufnahme der Inhalte zum Thema Beweisen, Begründen, Argumentieren sowie deren Aufbereitung und Darbietung erstellt.

[4] So wurden falsche, aber formal-symbolsprachliche Beweise als richtig anerkannt. Umgekehrt wurden nicht formal-symbolsprachlich abgefasste Beweise als fehlerhaft abgelehnt, obwohl die Schüler zu der Meinung tendierten, dass mit dieser Argumentation ein Mitschüler besser zu überzeugen wäre.

[5] Ein Beispiel aus [24] für eine verkürzende Darstellung, deren Gehalt von den Schülern wohl kaum nachvollzogen werden kann:
„Begründung eines Satzes
Die Begründung ist das Kernstück des Beweisverfahrens. Statt „Begründung" verwendet man häufig das Wort „Beweis", obwohl zum vollständigen Beweis „Voraussetzung" und „Behauptung" dazugehören.
Die Begründung nennt alle wichtigen Gründe, aus denen die Richtigkeit der Behauptung folgt. Als *Gründe* kommen in Betracht: …"
(Es folgt eine Aufzählung von „Gründen", bei der teilweise nur Beispiele genannt werden, die für ein Ganzes sprechen sollen, das den Schülern unbekannt ist.)

Beispiel 1: Eine Beweislücke

Unterschiedliche Lagebeziehungen von Punkten, die in geometrischen Beweisen oft zu teilweise umständlichen Fallunterscheidungen führen, werden in Schulbüchern manchmal vernachlässigt. Eine solche, von R. FRITSCH in [3] aufgedeckte Beweislücke ist ein gewissermaßen prominentes, weil historisches Beispiel hierfür. Sie betrifft den Beweis der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes und geht auf die Euklid-Bearbeitung von CHRISTOPH CLAVIUS zurück, die Anfang des 17. Jahrhunderts erschien. Alle bis 1993 von FRITSCH untersuchten Schulbücher wiesen die Lücke im genannten Beweis auf [3].
Kurz skizziert handelt es sich um folgenden Sachverhalt:
Der Satz „Sind zwei Winkel auf derselben Seite einer Strecke gleich groß, so liegen ihre Scheitel auf einem Kreisbogen, der auch die Endpunkte der Strecke enthält“ ist zu beweisen. Der übliche Beweis benutzt die Figur aus Abbildung 1, die wiederum implizit voraussetzt, dass es einen Schnittpunkt A mit dem Fasskreisbogen gibt. Der Fall von Abbildung 2, bei dem dies nicht der Fall ist, wird übergangen. Wie von FRITSCH in [3] dargelegt wird, ist die Ergänzung des Beweises für den übersehenen Fall nicht schwer.

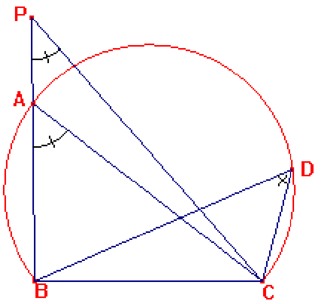

Abb. 1

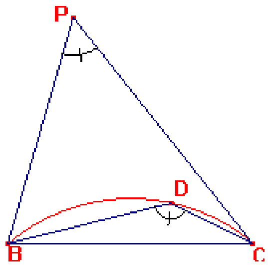

Abb. 2

Obwohl FRITSCH bereits 1993 auf diese Lücke in den Schulbuchbeweisen hinwies, hat sich in vielen neueren Schulbuchausgaben diesbezüglich so gut wie nichts geändert: Weiterhin geben die meisten Werke nur eine begründende Plausibilitätsbetrachtung anhand einer Figur wie in Abbildung 1 wieder (vgl. z.B. ROTH [32], KRATZ [25], SCHMID [34] jeweils mit Erscheinungsjahr 1993, eine Änderung scheint für diese Werke aufgrund des Erscheinungszeitpunkts nicht mehr möglich gewesen zu sein) oder gehen überhaupt nicht auf die Beweisbedürftigkeit dessen ein, dass das Fasskreisbogenpaar gerade derjenige geometrische Ort aller Punkte ist, von denen aus man eine Strecke unter einem gegebenen Winkel sieht (z.B. SUCKARDT & WOHLFARTH [37]). Die einzige für den Verfasser sichtbare Reaktion auf die Veröffentlichung von FRITSCH ist ein Halbsatz, der in [16] (BARTH et al.) im Vergleich zum Vorgängerbuch [15] (BARTH et al.) eingefügt wurde: „Der Beweis der Kontraposition steht im Bild“ wurde abgeändert in: „Der Beweis der Kontraposition für den Fall, dass PB den Kreisbogen schneidet, steht im Bild“. Darüber wäre neben den beiden aus dem Vorgängerband entnommenen Figuren, die Abb. 1 entsprechen, durchaus Platz für eine zusätzliche Abbildung gewesen, die den nicht weiter behandelten, fehlenden Fall geklärt hätte.

Gerade wenn man sich bewusst macht, dass das direkt vorangegangene Lehrplankapitel zu einem sensiblen Umgang mit Satz und Kehrsatz erziehen sollte und die erneute Beweisbedürftigkeit eines (wahren) Kehrsatzes zum Inhalt hatte, wird der Stellenwert sichtbar, der dem Komplex „Beweisen, Begründen, Argumentieren“ von manchem Schulbuchautor zugewiesen wird: Aus der Grundidee des Beweisens und Argumentierens in der Mathematik scheint offenbar ein kleines Kapitel geworden zu sein, dessen Inhalte für das Folgende offenbar nur von untergeordneter Bedeutung sind. Von einer solchen Art der Behandlung des Themas „Beweisen“ könnte das fatale Signal ausgehen, dass die Leser der betroffenen Schulbücher im Falle des Beweisens das Gelesene mit dem Beginn des neuen Kapitels wieder vergessen dürfen – ähnlich wie viele Lehrer in Deutschland über die allgemeine „Unsitte“ ihrer Schüler klagen, dass Gelerntes nach der Schulaufgabe mit dem Beginn der Einführung „des neuen Stoffes“ sofort wieder vergessen wird.

Werfen wir einen Blick auf die bereits einige Male angesprochene Lehrplaneinheit der 8. Jahrgangsstufe: Der Lehrplan schlägt eine Verschränkung der Viereckslehre mit den Gedanken zum Beweisen, zu Satz und Kehrsatz und zu verschiedenen Beweisverfahren vor. Dass – spätestens – die Viereckslehre eine Klärung dieser Gedanken erfordert, verdeutlichen beispielsweise die Parallelogramm-Kriterien: Hier ist es unerlässlich, Voraussetzung und Behauptung zu unterscheiden und zu wissen, dass eine Vertauschung beider keine von vornherein wahre Aussage zu liefern braucht.
Einige Lehrbücher trennen – anders als im Lehrplan vorgeschlagen – die Inhalte zum Beweisen und zum Kehrsatz von der Viereckslehre ab (z.B. ROTH [31], [32], KRATZ [24], BARTH et al.[16]). Dies ist – abgesehen von

arbeitsökonomischen Vorteilen bei der Anpassung alter Lehrwerke an neue Lehrpläne – grundsätzlich keine abzulehnende Vorgehensweise, denn so könnte das mathematische Beweisen seiner Bedeutung entsprechend unterstrichen werden. Wird jedoch wie in [16] (BARTH et al.) oder [32] (ROTH) die Viereckslehre dem Kapitel zum mathematischen Beweis vorangestellt, so wird die Chance vertan, Beweisverfahren, Satz und Kehrsatz bei den Vierecken „in Aktion“ zu erleben.
Ein verschränkter Aufbau der Inhalte – wie vom Lehrplan nahegelegt – findet sich beispielsweise in [37] (SUCKARDT & WOHLFARTH) und [34] (SCHMID).

Beispiel 2: Der indirekte Beweis

Wie bereits weiter oben gesagt, unterscheiden sich die Darstellungen der Schulbücher zum Thema Beweisen und Argumentieren in hohem Maße. Dies soll am Beispiel des indirekten Beweises bzw. Widerspruchsbeweises als Beweismethode verdeutlicht werden.
In keinem der untersuchten Lehrwerke findet sich eine Bemerkung, die der Sonderstellung dieser Beweismethode wirklich gerecht wird. Woran liegt es, dass indirekte Beweise umstritten waren, dass es einen Konflikt um das „tertium non datur“ gab, dass bestimmter Schulen von Mathematikern alle Beweise auf konstruktivem Wege zu führen versuchten? Die Differenzen zwischen Platonisten, Formalisten und Konstruktivisten in diesem Punkt sind ein hochinteressantes Thema, das Gelegenheit böte, Schüler bei einem Thema, das die Lebendigkeit der Mathematik zeigt, für diese Wissenschaft zu interessieren.
Einige ältere Bücher erwähnen den indirekten Beweis überhaupt nicht (z.B. WOLFF [40], LAMBACHER & SCHWEIZER [26]) oder nur in einer Fußnote bzw. Randbemerkung, wenn dieses wichtige Beweisverfahren einmal benötigt wird (z.B. FABER [19], KRATZ [21]). Seit der Einführung des noch gültigen Lehrplanes scheint sich der indirekte Beweis als Inhalt des Darstellungsteils zum geometrischen Beweisen allgemein in den Schulbüchern durchgesetzt zu haben. Das Beweisverfahren ist, wenn auch meist nur kurz anhand eines Beispiels[6] angesprochen, in den aktuellen Schulbüchern präsent. Es gibt jedoch Varianten: Als äquivalent und richtig zu werten sind Formulierungen der folgenden Grundtypen, auch wenn sie bei den Schülern recht unterschiedliche Vorstellungen hinterlassen können:
Typ A: „Dieser Beweis ist ein Beispiel für einen Widerspruchsbeweis. Dabei geht man von einer zur Behauptung gegenteiligen Annahme aus und zeigt, dass sie zu Aussagen führt, die der Voraussetzung oder geltenden Sätzen widersprechen“ [34] (SCHMID).
Typ B: „Wir sprechen allgemein von einem indirekten Beweis, wenn ein Satz dadurch bewiesen wird, dass seine Verneinung widerlegt wird“ [24] (KRATZ).
Typ C: „ein wichtiges Beweisverfahren in der Mathematik ist der sog. indirekte Beweis (auch Widerspruchbeweis genannt). (...) Von den möglichen Fällen werden alle bis auf einen durch Widerspruch mit einem Grund- oder Lehrsatz ausgeschieden“ [18] (ERNST), ähnlich [17] (ERNST).
In den Text zu Typ A hätten korrekterweise auch Widersprüche zu als wahr angenommenen Axiomen aufgenommen werden müssen, gerade weil die Winkelsumme im Dreieck, zu der in [34] (SCHMID) ein Widerspruch hergestellt wird, oft als Axiom verwendet wird. Dabei handelt es sich aber wohl um eine Kleinigkeit.
In [15] (BARTH et al.) und [16] (BARTH et al.) hingegen wird der Widerspruchsbeweis als Beweis der Kontraposition einer Aussage erklärt. Dass dies mathematisch nicht richtig bzw. abseits wissenschaftlicher Begriffsgebräuchlichkeiten ist, kann z.B. in Standardwerken zur Logik wie in [11] (TARSKI) nachgelesen werden. Zusätzlich ergeben sich in [16] (BARTH et al.) beweistechnische Nachteile, wenn immer die Negation der jeweiligen Voraussetzung aus der Verneinung der Behauptung abzuleiten ist. Ein Schüler, der nach [16] (BARTH et al.) gelernt hat, wird sich mit einem Schüler des Nachbargymnasiums, der ein anderes Schulbuch in Händen hielt, kaum verständigen können, wie man einen Widerspruchsbeweis führt.

Abschließend sei ein Zitat von POLYA aus [9] zu diesem Punkt wiedergegeben, das an Originalität von keinem der untersuchten Lehrwerke erreicht werden dürfte:

„Reductio ad absurdum und indirekter Beweis sind verschiedene, aber verwandte Verfahren.

Reductio ad absurdum zeigt die Unrichtigkeit einer Behauptung, indem man aus ihr etwas offensichtlich Widersinniges ableitet. „Die Zurückführung auf etwas Widersinniges“ ist ein mathematischer Verfahren, aber es ähnelt etwas der Ironie, dem Lieblingsverfahren eines Satirikers. Ironie gibt sich den Anschein einer gewissen Meinung und betont und übertreibt sie, bis sie zu einer offensichtlichen Absurdität führt.

Der indirekte Beweis stellt die Wahrheit einer Behauptung auf, indem er zeigt, dass die entgegengesetzte Behauptung falsch ist. Der indirekte Beweis hat so ein wenig Ähnlichkeit mit dem Kunstgriff des Politikers, der einen Kandidaten damit durchbringt, dass er den Ruf des Gegenkandidaten zerstört.

Sowohl die „Reductio ad absurdum“ wie der indirekte Beweis sind wirksame Mittel der Entdeckung, die sich ganz von selbst dem nachdenkenden Menschen bieten. Trotzdem sind sie bei einigen Philosophen und bei vielen Anfängern nicht beliebt, was verständlich ist; ironische Menschen und geriebene Politiker gefallen nicht jedermann.“

[6] Meist wird der Satz „Zwei Geraden mit gemeinsamer Senkrechten haben keinen Schnittpunkt“ bewiesen.

Beispiel 3: Mehrere Kehrsätze oder teilweise Satzumkehrung? – Aspekte der Logik

In Beweisen werden Aussagen mit Hilfe zulässiger Schlussweisen aus als gültig angenommenen und/oder bereits bewiesenen Aussagen gefolgert. Die mathematische Logik legt dabei fest, welche Schlussweisen erlaubt sind. Inhalte der Logik finden sich in Schulbüchern kaum – sie sind verstreut über die Jahrgangsstufen und in der Regel nur eher unvollständig und beispielartig aufgeführt (z.B. KRATZ [24], S. 25). Diese in Kauf genommene Ungenauigkeit führt dort zu seltsamen Konstrukten, wo Kenntnisse der Logik hilfreich gewesen wären. Dies ist beispielsweise dort der Fall, wo die Voraussetzung aus mehr als einer Aussage besteht. [24] (KRATZ) überrascht mit der Zwischenüberschrift „Teilweise Satzumkehrung", die als „Vertauschung der Behauptung mit einem Teil der Voraussetzung" erklärt und am Beispiel erläutert wird. Immerhin gibt [24] (KRATZ) eine tabellarische Übersicht über das Beispiel, in dem zu einem Satz neben dem Kehrsatz zwei „Teilumkehrungen" angegeben sind. Wohl noch verwirrender ist das Vorgehen in [31] und [32] (ROTH), wo ohne Einführung im Beispielteil drei verschiedene Kehrsätze zu einem Satz aufgeführt und auf ihre Wahrheit untersucht werden. Jede erklärende Bemerkung zu diesem Widerspruch zum Einführungsteil fehlt.
In der Sprache der Logik formuliert handelt es sich um folgendes Problem (A, B, C Aussagen):
Der Satz : $A \wedge B \Rightarrow C$
hat die eindeutige Umkehrung (Kehrsatz): $C \Rightarrow A \wedge B$
Manchmal ist jedoch erwünscht, zu dem Satz mit Generalvoraussetzung A: $B \Rightarrow C$
die Umkehrung mit der gleichen Generalvoraussetzung A: $C \Rightarrow B$
zu bilden.
Die Schwierigkeit besteht darin, dass sprachliche Formulierungen von Sätzen oft nicht klar erkennen lassen, welcher Teil der Voraussetzung als Generalvoraussetzung angesehen werden soll. Es stellt sich die Frage, ob nicht mehr Wissensvermittlung im Bereich der Logik zu mehr Sicherheit bei den Schülern führen könnte. Hier handelt es sich gegebenenfalls um ein Mehr an Formalismus, das zur Orientierung in unübersichtlichen sprachlichen Formulierungen dienen könnte. Auch beweisbezogene Lösungsstrategien, wie z.B. lokales Ordnen von Eigenschaften, würden unterstützt. Die Formulierungen des Lehrplans lassen jedenfalls eine etwas gründlichere Einführung in die Logik zu.

Ausblicke

Um die Gedanken zum Status Quo der Schulbuchliteratur zum Beweisen abzuschließen, sei ein Blick in die Zukunft gewagt: Derzeit gibt es mit der Einführung eines neuen Lehrplanes in Bayern die Chance, Schulbücher für den zukünftigen Unterricht neu zu gestalten. Wirft man einen Blick in den Lehrplanentwurf [43], um die Frage zu ergründen, wie intensiv zukünftige Lehrwerke Schülerkompetenzen im Beweisen fördern sollen, so erstaunt es, dass in dem Entwurf zum künftigen Jahrgangstufenlehrplan die beweisbezogenen Inhalte in den Jahrgangsstufen 7 und 8 keinen mit dem derzeit gültigen Lehrplan vergleichbaren Stellenwert zu erhalten scheinen. Ein Lehrplanabschnitt, der dem der Vierecksiehre der 8. Jahrgangsstufe mit seinen Schwerpunkten im Bereich des Beweisens entspricht, fehlt. Es finden sich nur allgemeine Bemerkungen[7], die jedoch hinter entsprechenden Anforderungen des noch geltenden Lehrplanes in Jahrgangsstufe 7 zurückbleiben.

Es ist jedoch zu hoffen, dass die Freiheiten, die der neue Lehrplan den Lehrerinnen und Lehrern in Bayern einräumen will, auch für eine schülerzentrierte Vertiefung des Themenbereichs „Beweisen und Begründen" genutzt werden.
Eine Unterrichtsform, die sich für ein solches schülerzentriertes und schüleraktivierendes Vorgehen mit interdisziplinären Vergleichen eignet, ist die Themenstudienarbeit.

„Beweisen und Begründen" und Themenstudienarbeit

In der Themenstudienarbeit sichten die Schüler Fragmente unverarbeiteter, d.h. nicht schulbuchmäßig aufbereiteter Rohmaterialien, erkunden, verarbeiten und werten diese und verfertigen in der Themenstudie eine oft überblicksartige Gesamtdarstellung, die eine eigene Stellungnahme enthalten kann, gleichsam eine Art „Gutachten" (vgl. [6], [7]).

[7] Beispielsweise in „M 7.1 Figurengeometrie: vom Zeichnen und Beschreiben zum Konstruieren und Begründen" (Jahrgangsstufe 7):
„Sie (die Schüler) lernen, geometrische Phänomene allmählich abstrakter zu analysieren sowie folgerichtig zu argumentieren und zu begründen. Gleichzeitig löst eine stärker axiomatisch geprägte Denkweise ihren bisher rein anschaulich und intuitiv geprägten Wissenserwerb nach und nach ab."

In Analogie zu der in [6] vorgeschlagenen Konzeption eignet sich das Thema „Beweisen, Begründen, Argumentieren“ beispielsweise gut für Themenstudienarbeit in der 8. Jahrgangsstufe. Nähere Untersuchungen in diesem Bereich werden gegenwärtig angestellt.
Themenstudienarbeit ermöglicht es den Schülern, ohne Beherrschung aller formalen Details dieses mathematischen Inhaltsbereichs – deren vollständige Vermittlung ja auch nicht Ziel des schulischen Mathematikunterrichts sein kann – einen tragfähigen Einblick in das Beweisen und Argumentieren in der mathematischen Wissenschaftspraxis zu erhalten.

Wissenschaftsorientierung im Mathematikunterricht als Vermittlung eines wahreren Bildes von der Mathematik

Mathematik ist eine lebendige Wissenschaft. Das Leben findet dort statt, wo Mathematiker neue Begriffe argumentativ erkunden, miteinander Ideen und Beweisvorschläge diskutieren und schließlich immer weiter ausarbeiten. Davon sollten Schüler mehr erfahren, als sie es gegenwärtig aus den Darstellungsteilen der Schulbücher herauslesen können.
„Erfahren“ ist dabei mindestens im Sinne von „zur Kenntnis bekommen“ gemeint, im Idealfall könnte es „in praktischer Erfahrung erleben“ bedeuten.
Zu einer stärkeren Wissenschaftsorientierung des Mathematikunterrichts im Sinne der Vermittlung eines derartigen, zutreffenderen und damit genaueren Bildes vom Beweisen angeregt zu haben, ist eines der Anliegen dieses Beitrags.

Literatur

Boero, P. [1]: *Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education*, in: International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 1999, S. 7-8

Dörfler, W., Fischer, R. (Hrsg.) [2]: *Beweisen im Mathematikunterricht*, Wien 1979

Fritsch, R. [3]: *Wer hat’s gemerkt? Geometrische Beweislücke über 400 Jahre unentdeckt?*, in: Didaktik der Mathematik, 1993, Heft 2

Fritsch, R. [4]: *Bemerkungen zur Viereckslehre*, in: Schriften der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste, Band 19 (1998), S. 69-94

Healy, L., Hoyles, C. [5]: *Justifying and proving in school mathematics.* Technical Report on the Nationwide Survey, Mathematical Science, London 1998

Kuntze, S. [6]: *Themenstudienarbeit als Unterrichtsform im Mathematikunterricht mit besonders begabten Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe II*, in: Peschek, W. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2002, Hildesheim 2002

Kuntze, S. [7]: *Themenstudienarbeit im Mathematikunterricht als Vorbereitung auf die Facharbeit*, in: MNU, eingereicht 2002

NCTM (Hrsg.) [8]: *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston 2000

Polya, G. [9]: *Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme*, Bern 1949

Reiss, K., Renkl, A.[10]: *Learning to prove: The idea of heuristic examples*, ZDM 2002, Vol. 34(1)

Tarski, A. [11]: *Einführung in die mathematische Logik,* Göttingen 1969

Törner, G., Grigutsch, S. [12]: *„Mathematische Weltbilder“ bei Studienanfängern – eine Erhebung*, in: Journal für Mathematikdidaktik 15 (1994) S. 211-251

Wittmann, E., Müller, G. [13]: *Wann ist ein Beweis ein Beweis?,* http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/ Verschie/Wittmann1/beweis.htm

Schulbücher:

Andelfinger, B [14]: Mathematik Band III, Geometrie 1, Verlag Herder, Freiburg im Breisgau 1971

Barth, F., Krumbacher, G., Matschiner, E., Ossiander, K. [15]: Anschauliche Geometrie 2, Ehrenwirth, München 1986

Barth, E., Barth, F., Krumbacher, G., Ossiander, K. [16]: Anschauliche Geometrie 8, Ehrenwirth, (Neubearbeitung) München 1993

Ernst, M. [17]: Geometrie auf abbildungsgeometrischer Grundlage Teil 1, Ehrenwirth, München 1971

Ernst, M. [18]: Geometrie 1, Ehrenwirth, München 1975

Faber, K. [19]: Geometrie 1 (Geometrie der Kongruenzabbildungen), Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1968

Hoffmann, H. [20]: Geometrie 1 Die Punktmenge und ihre Abbildung, Lindauer, München 1975

Kratz, J. [21]: Geometrie Ein Lehr- und Arbeitsbuch 1.Teil, bsv, München 1970

Kratz, J. [22]: Geometrie 1 Ein Lehr- und Arbeitsbuch, bsv, München 1977

Kratz, J. [23]: Geometrie 1 neu bearbeitet, bsv, München 1983

Kratz, J. [24]: Geometrie 7./8. Schuljahr, bsv, München 1985

Kratz, J. [25]: Mathematik 8 Geometrie, bsv, München 1993

Lambacher, T., Schweizer, W. (Hrsg.) [26]: Geometrie Ausgabe A Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen, Ernst Klett Verlag, 5.Auflage Stuttgart

Meyer, K. (Hrsg.) [27]: Brennpunkt Geometrie Jahrgangsstufe 8, Schroedel Schulbuchverlag, Hannover 1991

Renner, C. [28]: Planimetrie, Ehrenwirth, München ca.1952

Roth, D., Stingl, P. [29]: Geometrisches Beweisen (bsv Lehrprogramme), bsv, München 1972

Roth, D., Stingl, P. [30]: Geometrie Buch 1, bsv, München 1978

Roth, D. [31]: Basismathematik 8 Geometrie Üben-Verstehen-Anwenden, bsv, München 1989

Roth, D. [32]: Basismathematik 8 Geometrie Üben-Verstehen-Anwenden Ausgabe B, bsv, München 1993

Schmid, A., Schweizer, W. (Hrsg.) [33]: LS Mathematik Geometrie Bayern 8, Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1987

Schmid, A.(Hrsg.) [34]: Lambacher Schweizer Geometrie Bayern 8, Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1993

Schröder, H., Uchtmann, H. (Hrsg.) [35]: Einführung in die Mathematik für allgemeinbildende Schulen Geometrie 1, Diesterweg, Frankfurt am Main 1967

Suckardt, U., Wohlfarth, P. [36]: Mathematik Buch 8 G Geometrie, bsv, München 1985

Suckardt, U., Wohlfarth, P. [37]: Mathematik Buch 8 G Geometrie Neubearbeitung, bsv, München 1995

Schweizer, W. (Hrsg.) [38]: Lambacher-Schweizer Mathematisches Unterrichtswerk Ausgabe B Geometrie 1, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1969

Teller, O., Nikol, F. [39]: Zwerger-Klug Planimetrie (Ebene Geometrie), J. Lindauer Verlag, München 1952

Wolff, G. (Hrsg.) [40]: Elemente der Mathematik Geometrie und Trigonometrie Band 2 (Mittelstufe), Schroedel/Schöningh, Paderborn 1965

Lehrpläne und Lehrplanentwürfe

[41] Lehrplan für das bayerische Gymnasium, KWMBl I 1990 So-Nr. 3, München 1991

[42] Fachlehrplan für Mathematik, KWMBl I 1991 So-Nr. 8, München 1991

[43] http://www.isb.bayern.de/gym/math_inf/lehrplan/mathe/planung.htm

Sebastian Kuntze
Waldsaumstr. 16
81377 München