Sebastian Kuntze, Johanna Winkler

„Wie genau ist genau?“
Inhalte für einen Pluskurs in der Oberstufe des Gymnasiums

„Wie genau ist genau ?“ - Das war die Frage, der eine Gruppe von Schülern im August 1998 in 2½wöchiger Arbeit während eines Schülerakademie-Kurses nachging. Der vorliegende Beitrag hat zum Ziel, dem Leser einen thematischen Überblick über die Inhalte eines großen Teils der Kursarbeit zu bieten und so ein Stück von dem Reichtum des Kursthemas sichtbar werden zu lassen. Das interdisziplinäre Thema „Genauigkeit“ ist im Rahmen der Förderung besonders begabter Schülerinnen und Schüler insbesondere auch für Pluskurse in der Oberstufe des Gymnasiums geeignet [14]. Zur thematischen Aufbereitung können die folgenden Gedanken, die von einleitenden, überblicksartigen Betrachtungen zu exemplarischen Inhalten u. a. der Theorie metrischer Räume und der Numerik hinführen, als Arbeitsgrundlage dienen.

1. Überblick

Genauigkeit ist ein Begriff, der viele wissenschaftliche Disziplinen entscheidend prägt, jedoch nirgendwo präzise und umfassend definiert wird.
Es scheint, als sei der Blick in die Praxis des jeweiligen Gebietes notwendig, um beschreiben zu können, was Genauigkeit sowohl beim Umgang mit Zahlen, als auch in der fachtypischen Argumentationsweise bedeutet.
Genauigkeit ist dabei einerseits eine Anforderung, die die tägliche Detailarbeit einer Wissenschaft oder auch von Bereichen der Alltagswelt bestimmt, andererseits hat der Begriff eine metawissenschaftliche, d.h. der Wissenschaft übergeordnete Dimension: Manche Wissenschaft wird sogar ganz entscheidend durch ihre fachspezifisch verwendete Genauigkeit charakterisiert.
Genauigkeit zum Thema der Betrachtung zu machen bedeutet, unterschiedliche Bereiche von Wissenschaft, Technik und Alltagswelt (möglichst „von innen“) zu beobachten, dabei die geschilderten verschiedenen Ebenen zu berücksichtigen, wichtige Ausprägungen und die jeweilige Bedeutung von Genauigkeit zu erkennen und in ein Gesamtbild einzufügen.

Bevor im Folgenden Betrachtungen zu konkreten Inhalten angestellt werden, die sich als Grundlage für einen Kurs zum Thema „Genauigkeit“ eignen, werden Kurzüberblicke über Komponenten des interdisziplinären Themas „Genauigkeit“ gegeben und Überlegungen zur Stoffauswahl angestellt.
Aufgrund der Zusammenhänge zwischen den einzelnen Teilgebieten ist die folgende Einteilung in 1.1. bis 1.4. nicht unproblematisch: Es ergeben sich Überschneidungen und gegenseitige Bedingtheiten von Teilaspekten.

1.1. Die Genauigkeit beim Umgang mit Zahlen in der Mathematik

Die Mathematik benutzt Zahlen, um gewisse Aussagen präziser formulieren zu können. Was Zahlen in der Mathematik überhaupt sind, kann jedoch bereits eine relativ tiefgehende Frage sein. Sie verweist auf die axiomatische Grundlegung mathematischer Theorien und andere mathematische Objekte wie Mengen, Abbildungen, etc. (vgl. z.B. die Definition der natürlichen Zahlen auf der Basis der Axiomatik der Mengenlehre). Die Frage nach dem Wesen des mathematischen Zahlbegriffs ergibt also Zusammenhänge mit 1.2.
Die Betrachtung der mathematischen Anwendungen von Zahlen im Zusammenhang mit der Genauigkeit führt zum Studium von Teilgebieten der Analysis und von Gebieten insbesondere der angewandten Mathematik.

In der Analysis sind Folgen und Konvergenz von Interesse, wobei es aufschlussreich ist, sich allgemeiner mit Folgen in metrischen Vektorräumen zu befassen. Abstandsbegriffe wie Metriken und Normen verweisen auch auf das Messen im realen Leben.
Über die Behandlung von offenen ε-Umgebungen kann man einen Ausblick auf die Topologie metrischer Räume erhalten, die Instrumente für Genauigkeitsbetrachtungen zur Verfügung stellt.
Der Gedanke des Messens mit Hilfe von Zahlen hat sich auch in vielen anderen Gebieten der Mathematik, z.B. in der Maßtheorie niedergeschlagen.

Die Idee der Steigerung der Genauigkeit findet sich in der Theorie der Approximation wieder. Die Numerik ist eine Teildisziplin der Angewandten Mathematik, die für unser Thema auch wegen der algorithmischen Umsetzbarkeit von Näherungsverfahren sehr wichtig ist.
Im Bereich der mathematischen Stochastik und Statistik dienen Schätzer (Schätzgrößen) dazu, wichtige Größen bzw. Parameter anzunähern.
Noch viele andere Bereiche der Mathematik befassen sich mit Begriffen, die der Untersuchung der Genauigkeit mit Hilfe von Zahlen dienen. Zu nennen ist beispielsweise die Betrachtung der Stabilität der Lösung von Differentialgleichungen für „genaue Zukunftsvoraussagen“, was z.B. in der Physik von Bedeutung ist. Man denke z.B. an das Verhalten Chaotischer Systeme. Auch Aspekte der Zahlentheorie sind von Interesse.

1.2. Die Genauigkeit bei der argumentativen Formulierung von Gedankengängen in der Mathematik

Die Mathematik als exakte Wissenschaft erweist sich für das Thema Genauigkeit als sehr ergiebig. So sind der Theorieaufbau mit Axiomsystemen, die Logik, die Anforderungen an den mathematischen Beweis und die Diskussion um Computerbeweise, sowie der Versuch, die mathematische Fachsprache „möglichst genau zu machen“, Bereiche, in denen es um Genauigkeit geht:

- Das Bestreben, eine *genaue Sprache der Mathematik* zu finden, führt geradewegs zu den Wurzeln der mathematischen Theorien, den Axiomsystemen, die ihrerseits undefinierte Begriffe verwenden. Angesichts von auftretenden Antinomien und den Erkenntnissen von Gödel erscheint dieses Fundament als nicht uneingeschränkt tragfähig. An dieser Stelle wird deutlich, dass erkenntnistheoretische Gedanken und das Einbeziehen der Vorannahmen in die Genauigkeit der Resultate eine wichtige Rolle für das Thema „Wie genau ist genau?“ spielen.

- Teilgebiete der *Logik* und der Modelltheorie mit ihren Untersuchungen von mathematischen Sprachen und der Widerspruchsfreiheit von Axiomsystemen können zum Thema „Genauigkeit mathematischer Sprache“ viele Aspekte beitragen.

- Wiederum die Logik ist gefordert, wenn es um das Ableiten von Sätzen aus den Axiomen geht. Die logische Strenge bzw. Genauigkeit mathematischer Begründungsweisen ist für die Form von mathematischen *Beweisen* von höchster Bedeutung. Die geforderte „ideale“ Genauigkeit in mathematischen Beweisverfahren gilt als erreicht, wenn die Fachwelt den Beweis geprüft und anerkannt hat. Viele historische Anekdoten wissen jedoch von der Unzuverlässigkeit des „Faktors Mensch“ in der Mathematik zu berichten.

- Anwendungsorientiert und aus einem ganz anderen Blickwinkel zeigt die *mathematische Stochastik und Statistik* die Genauigkeit von Schlussfolgerungen, wenn Fragen behandelt werden, wie etwa: Wie tragfähig sind erhobene Daten für das Ziehen von Schlussfolgerungen? Wie präzise sind statistisch verteilte Messergebnisse? Begriffe wie Standardabweichung, Konfidenzintervalle, Schätzer, Signifikanztests haben mit Genauigkeit zu tun und dienen als Werkzeug für viele andere Wissenschaften.

- Schließlich stellt sich beim Blick auf die Mathematik von außen die Frage, ob die mathematischen Idealisierungen bei der Modellierung von Realität nicht - verglichen mit der komplexen Wirklichkeit - höchst ungenau sind. Die hohe Genauigkeit der Mathematik innerhalb ihrer Theorien wird offenbar mit einer starken Schematisierung der modellierten Wirklichkeit erkauft. Auch im Bereich der Physik spielt dieser *Dualismus „Genauigkeit - Vereinfachung“* eine Rolle.

1.3. Die Rolle der Genauigkeit in der Physik

Die Physik formuliert Erkenntnisse über die Natur weitgehend in der Sprache der Mathematik. Damit stehen Genauigkeitsbetrachtungen oft in engem Zusammenhang mit Inhalten der angewandten Mathematik. Andererseits entscheidet in der Physik das Experiment über das mathematische Modell. Insofern ist ein solches mit Hilfe der Mathematik formuliertes Modell, das u.a. Vorhersagen ermöglichen soll, abhängig von den Ergebnissen der experimentellen Praxis und nicht etwa von theoretischen Beweisen.

- Die Physik unterscheidet sich in ihren Vorstellungen zur Genauigkeit also grundlegend von der Mathematik. Bereits bei physikalischen Messungen stellt sich das Problem der Genauigkeit als *praktische Herausforderung des Experimentators*.

- Der Begriff „sinnvolle Genauigkeit“ steht für die Forderung nach einem *reflektierten Umgang mit der Genauigkeit von Messdaten*.

- Die Theorie der *Fehlerrechnung* hilft, die Genauigkeit der aus gemessenen Werten errechneten Daten abzuschätzen. Numerische und statistische Verfahren werden dabei angewandt, um Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen zu bestätigen.

- In der *historischen Entwicklung* der Physik hat eine immer größere Messgenauigkeit die Theorien und das Weltbild der Physik in mehreren Schüben revolutioniert. Dieser Zusammenhang zeigt die große Bedeutung der Genauigkeit in der Physik.

- Hohe Genauigkeit in den Messmethoden der Physik darf hingegen nicht überbewertet werden: Das *deterministische Chaos* im Verhalten von gewissen beobachteten Systemen kann ein zu großes Vertrauen in die Genauigkeit von Voraussagen in der Physik erschüttern: Trotz geringster Abweichungen bei den Anfangsbedingungen ist keine genaue Voraussage des Langzeitverhaltens des beobachteten Systems mehr möglich.

- Eine weitere Facette steuert die *Quantenmechanik* bei: Die Einwirkung der Messung auf das beobachtete System ist nicht mehr zu vernachlässigen und die Messung wird zum Zufallsexperiment. Die Unschärferelation von Heisenberg enthält diesen Gedanken.

1.4. Beiträge zum Thema aus anderen Bereichen

Lebensbereiche, in denen Vorstellungen zum Thema Genauigkeit eine Rolle spielen, stehen oft mit der Mathematik oder der Physik in wechselseitiger Beziehung. Insofern bestehen inhaltliche Berührpunkte mit den vorausgegangenen Abschnitten 1.1. bis 1.3..

- In der alltäglichen Informationsübermittlung ist die verwendete Genauigkeit situationsbezogen und adressatenabhängig, oft auch von der Intention des Sprechers geprägt. Die Auffassung von Kommunikationssituationen im *Alltag* als intersubjektive Austauschprozesse von Informationen führt zur Betrachtung des Menschen als „informationsverarbeitendes Wesen“ und zur Frage: „Wie genau kann der Mensch wahrnehmen/denken?“. Bei der *Informationsverarbeitung* und der Konstruktion subjektiver Wirklichkeit durch das Individuum wird die jeweils verwendete Genauigkeit auf verschiedenen Ebenen wirksam.

- Fragen nach menschlicher Wahrnehmung, der Bildung von Begriffen und kognitiven Netzen schließen sich an und zeigen die Bedeutung der *Psychologie* sowie in Randbereichen auch der Medizin und der Biologie für das Thema „Genauigkeit“.

- Bei der Arbeit mit dem *Computer* ist der richtige Umgang mit der verwendeten bzw. möglichen Genauigkeit wichtig. Angesichts der vielen Einsatzgebiete des Computers für Berechnungen, Simulationen, Auswertungen, etc. muss sogar von einer steigenden Bedeutung von Genauigkeitsbetrachtungen ausgegangen werden.

- Dass die Genauigkeit neben der Physik auch im Bereich weiterer *Natur- und Ingenieurwissenschaften* eine zentrale Rolle spielt, liegt auf der Hand. Oft sind wiederum Numerik oder Stochastik/Statistik die Teilgebiete der Mathematik, die angewendet werden.

- Die Genauigkeit *juristischer Beweisverfahren* kann mit der des mathematischen Beweises verglichen werden. Normen für das Zusammenleben der Menschen brauchen einerseits eine Toleranzbreite für menschliches Ermessen, andererseits Verbindlichkeit in ihrer regelnden Funktion. Dies kann als Genauigkeitsproblem aufgefasst werden.

- Aussagen der *Erkenntnistheorie* zur Frage „Was können wir wissen?“ und viele andere *philosophische Überlegungen* können zusätzliche Gesichtspunkte für das Thema „Genauigkeit“ liefern.

Es gibt sicherlich noch andere Lebensbereiche, aus denen Denkanstöße zum Thema „Wie genau ist genau?“ kommen. In jedem Falle können sich Gedanken zum Thema „Genauigkeit“ nicht auf Mathematik und Physik beschränken, sondern müssen vielfältige interdisziplinäre Gesichtspunkte mit einbeziehen. Umgekehrt wird die Bedeutung und auch die Stellung der Mathematik innerhalb der anderen Lebensbereiche sichtbar.

2. Gedanken zur Stoffauswahl

In seiner Vielfalt kann das Thema Genauigkeit mit einem Mosaik verglichen werden. Auf den ersten Blick gibt es viele, oft zunächst unzusammenhängend erscheinende Einzelbefunde und Erscheinungsformen von Genauigkeit. Diese „Mosaiksteinchen“ ergeben dann aber geordnet und aus einer fächerübergreifenden Distanz betrachtet ein Gesamtbild, das nicht von vornherein festgelegt ist und je nach Betrachter und Blickwinkel unterschiedlich sein kann. Dieses Gesamtbild in seiner Farbigkeit, Komplexität und auch oft Fragmenthaftigkeit herzustellen ist das Ziel der Auseinandersetzung mit dem Thema „Genauigkeit“.

Für die Stoffauswahl erscheint es sinnvoll, in einem Kurs zum Thema „Wie genau ist genau?“ ein Grobraster des Gesamtmosaiks zu vermitteln. Das bedeutet, dass die Vielfalt der Themenstellung an exemplarischen Inhalten verdeutlicht werden sollte. Dabei sollten insbesondere in der Mathematik die einzelnen Inhalte so genau behandelt werden, dass das wissenschaftliche Grundprinzip deutlich wird. Nur so können sich später dann passende Mosaiksteinchen um den Kristallisationspunkt der bekannten Mosaiksteinchen herum anlagern und das Gesamtbild immer weiter ergänzen.
Im Hinblick auf Lernstrategien ist es dabei nützlich, die Schüler auf die mosaikhafte Struktur der Behandlung des Themas hinzuweisen.

Es wird kaum möglich sein, alle in 1. aufgeführten Inhalte im Rahmen eines Pluskurses oder eines Kurses einer Schülerakademie zu behandeln.
Der Zugang zu einigen relevanten Teilgebieten der Mathematik erweist sich als sehr aufwändig, andere Teilgebiete werden erst nach einiger Arbeit am Thema als interessant erkannt. Es ist auch darauf zu achten, dass der zu bearbeitende Themenbereich eine Betrachtung der Genauigkeit auf verschiedenen Ebenen (innerwissenschaftlich-inhaltlich, metawissenschaftlich) zulässt.
Die Inhalte sollten so ausgewählt werden, dass Gebiete berücksichtigt werden, die zusätzlich zu ihrer wissenschaftlichen Tiefe einen hohen Anschauungs- und/oder Anwendungswert haben. Die Numerik mit ihren Verbindungen zu anderen Disziplinen erfüllt diese Anforderung. Beispielsweise eignet sich die Approximation in linearen Vektorräumen wegen ihrer Allgemeinheit, bemerkenswerter Sätze und weitgehender thematischer Abgeschlossenheit. Anwendungen in der Physik ergeben sich bei der Fehlerrechnung (Methode der kleinsten Quadrate, Regressionsgerade). Für die Arbeit am Computer liefert die Numerik verwertbare Algorithmen. Interessante Modellvorstellungen und Grundgedanken der Mathematik - z.B. Metriken als verallgemeinerte Abstandsbegriffe - treten hinzu.
Das genannte Teilkapitel der Numerik, erweitert um Sachverhalte aus der Theorie metrischer Vektorräume, ist geeignet, einen thematischen Hauptstrang zu bilden, der durch Beispiele und Zusatzgedanken bereichert werden kann.

Es sollte dabei immer wieder darauf hingewiesen werden, dass nicht nur die mathematischen Objekte und ihre Anwendung, sondern auch die Art ihrer Behandlung Gegenstand der Betrachtung sind. Gewissermaßen hat die Kursarbeit zwei Dimensionen: Einerseits die *sachliche Dimension*, in der die jeweiligen Theorien und Begriffe (z.B. Approximation in normierten Vektorräumen) im Vordergrund standen, andererseits die *exemplarische Dimension*, nämlich das Praktizieren und das Erkennen der Praxis der jeweiligen fachspezifischen Genauigkeit bzw. Strenge (z.B. korrektes Beweisen).

Wie bereits oben deutlich wurde, zeichnet sich das Kursthema durch besondere Vielgestaltigkeit aus. Der Vergleich mit einem Mosaik, dessen kleine Steinchen erst in der Gesamtschau ein Bild ergeben können, wurde gezogen.
Eine zu treffende Auswahl an Lerninhalten für den ersten Teil des Kursgeschehens sollte daher die folgenden Ziele vereinigen:

- Sie sollte die Vielgestaltigkeit des Themas erkennen lassen.
- Sie sollte aber auch jeweils so in die Tiefe gehen, dass exemplarisch die fachspezifische Vorstellung von genauem (wissenschaftlichen) Arbeiten deutlich wird. Geschlossene fachliche Einheiten (z.B. Metriken und Normen, kleine Kapitel aus der Numerik, Beispiele für deterministisches Chaos in der Physik etc.) empfehlen sich hier.
- Die Auswahl sollte solide Anknüpfungspunkte für den zweiten Teil des Kursgeschehens bieten.

Diese Überlegungen ließen es sinnvoll erscheinen, im ersten Teil des Kursgeschehens der Schülerakademie Themen aus der Theorie metrischer und normierter Vektorräume, Überlegungen zu Folgen, Themen aus der Approximationstheorie (Numerik), und ergänzend Aspekte zur Axiomatischen Grundlegung von mathematischen Theorien zu behandeln. Dies in Form von Vorträgen der Teilnehmer, Diskussionen und Übungen zu tun, bot sich an. Als Anwendung, aber auch als Kontrapunkt sollten Gedanken zur Fehlerrechnung in der Physik, zum deterministischen Chaos und eventuell auch ein Einblick in die Quantenmechanik dienen. Ausblicke gaben Aspekte der Statistik und der geschichtlichen Entwicklung des mathematischen Beweises.

Im Einzelnen fanden im Kurs die folgenden Vorträge statt:

Vorträge

1. Einführung: etwas Aussagenlogik, Quantoren, vollständige Induktion
2. Metriken und Normen
3. Skalarprodukt, Cauchy-Schwarz-Ungleichung; Umgebungen
4. Offene und abgeschlossene Mengen, Topologie
5. Folgen, d-Konvergenz von Folgen
6. d-Cauchy-Folgen und d-Konvergenz
7. Überblick über die axiomatische Grundlegung der reellen Zahlen
8. Näherung von π und $\sqrt{2}$ durch Folgen; numerische Umsetzbarkeit
9. Der Approximationssatz von Weierstraß
10. Approximation in normierten Vektorräumen: Der Fundamentalsatz der Approximationstheorie
11. Die Eindeutigkeit der besten Approximation
12. Normalgleichungen und lineare Regression
13. Fehlerfortpflanzung in der Experimentalphysik
14. Die Ausgleichsgerade
15. Chaos und Genauigkeit: Kausalität, Determinismus, Phasenraum, Sensitivität
16. Beispiele für chaotisches Verhalten im physikalischen Experiment (z.B. das Pohlsche Rad mit Unwucht)
17. Genauigkeit mathematischer Begründungen: Archimedes und die Berechnung des Kugelvolumens
18. Ein Beispiel für die Gewinnung „sicherer“ statistischer Aussagen: Signifikanztests

Die eher überblicksartigen Vorträge 1, 7, und 12 wurden von den Kursleitern übernommen.

Der Teil der Kursarbeit, über den berichtet werden soll, fand in Form von Vorträgen der Schüler mit Fragen und Diskussion statt, oft mit daran anschließenden kurzen Übungen.

Die Vortragsthemen wurden bereits im Vorfeld auf die Kursteilnehmer verteilt, Unterlagen zur Vorbereitung des Kurses und des persönlichen Vortragsthemas, u.a. Auszüge aus geeigneter Fachliteratur wurden den Schülern zugesandt. Eine Auflistung der Quellen für die Vorbereitung der einzelnen Vorträge werden hier jeweils unter den Vortragstiteln wiedergegeben und finden sich auch im Anhang von [13].
Bei den Vortragsthemen wurde darauf geachtet, dass nicht zu viele der Vorträge inhaltlich aufeinander aufbauten.
Vorschläge zur Variation des thematischen Aufbaus im Hinblick auf die Verwendung in einem Pluskurs finden sich in Abschnitt 4. Zunächst kommen wir jedoch zu den im Kurs „Wie genau ist genau?“ bearbeiteten Inhalten, die im Folgenden relativ ausführlich wiedergegeben werden. Die eine oder andere Schwerpunktsetzung ist dabei durch Mitwirkung der Kursteilnehmer und durch das unmittelbare Geschehen im Kurs entstanden. An dieser Stelle sei deshalb auch auf die Dokumentation des Kurses durch die Kursteilnehmer in [2] verwiesen, die auf ähnliche Weise den Vortragsteil des Kurses beschreibt.

3. Kursinhalte

3.0. Das Vorbereitungsblatt

Um darzustellen, von welchen gemeinsamen Voraussetzungen der Kurs ausging, wird im Folgenden das an die Teilnehmer versandte Vorbereitungsblatt im Wesentlichen wiedergegeben. Quantorenschreibweisen, die im Kurs Anwendung fanden, werden bei dieser Wiedergabe der Inhalte zum Zwecke der besseren Lesbarkeit vermieden.

Zur Vorbereitung stellen wir Euch ein paar Begriffe und Schreibweisen aus der Mathematik zusammen, die gleichzeitig auch als eine Art „Grundstock“ für das Verständnis der von Euch vorzubereitenden Literatur und die Kursarbeit dienen sollen.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bezeichne jeweils die Menge der natürlichen, der ganzen, der rationalen, der reellen und der komplexen Zahlen, „so, wie Ihr sie kennt“ (genauere Gedanken machen wir uns im Kurs).

Mathematische „Abkürzungen“:
Sei A eine Menge. *Quantorenschreibweisen (im Folgenden nicht mehr verwendet):*
$\forall a \in A : \ldots$ bedeutet: Für alle $a \in A$ gilt : ... (hier folgt eine Aussage)
$\exists a \in A : \ldots$ bedeutet: Es existiert ein $a \in A$, so dass gilt : ... (hier folgt eine Aussage)
Zur Bildung von Schnitt- und Vereinigungsmenge kennt Ihr die Symbole „ $\cap$ “ und „ $\cup$ “. Abkürzend schreibt man auch z.B. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$ oder: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$
ganz analoge Schreibweisen gibt es für die Vereinigungsmenge von Mengen A_1 , A_2 , A_3 , ... , und auch für Summen ($\sum$) und Produkte ($\prod$) von Zahlen a_1 , a_2 , a_3 , ... , z. B. $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.
Für Mengen A und B definiert man $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$, die Menge der *2-Tupel* mit Koordinaten aus A und B. Entsprechend kürzt man ab: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und definiert sogar für $n \in \mathbb{N}$:
$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n-mal). Ein Element $a \in \mathbb{R}^n$ sieht so aus: $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ oder

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$$, je nachdem, ob wir einen *Zeilen- oder Spaltenvektor* betrachten wollen.

Definition:
Sei G eine Menge und $+: G \times G \to G$ eine Abbildung. (G; +) heißt *kommutative* (oder *abelsche*) *Gruppe*, falls gilt:

i)	Für alle a , b , c $\in$ G gilt:	$(a+b)+c = a+(b+c)$	(Assoziativität)
ii)	Es gibt ein (neutrales Element) $e \in G$, so daß für alle $a \in G$ gilt	$e + a = a$	(Existenz eines neutralen Elements bzgl. +)
iii)	Für jedes $a \in G$ gibt es ein $a' \in G$, so dass:	$a + a' = e$	(Existenz von Inversen bzgl. +)
iv)	Für alle a , b $\in$ G gilt:	$a + b = b + a$	(Kommutativität)

Bemerkung: Man schreibt gemeinhin a + b statt genauer + (a , b) (wie bereits oben geschehen), das neutrale Element bezüglich der additiven Verknüpfung schreiben wir mit 0, das inverse Element zu a schreiben wir als -a.

Definition:
Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, (V,+) eine abelsche Gruppe und $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ eine Abbildung.
(V; +; $\cdot$) heißt *$\mathbb{R}$-Vektorraum*, falls gilt:
Für alle $a, b \in V$ und für alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:
i) $r \cdot (a+b) = r \cdot a + r \cdot b$
ii) $(r+s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a$
iii) $(r \cdot s) \cdot a = r \cdot (s \cdot a)$
iv) $1 \cdot a = a$

Bemerkung: Ganz analog definiert man einen $\mathbb{C}$-*Vektorraum.*

Aufgabe: Überzeuge Dich davon, daß $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und zwar für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Definition:
Sei $[a;b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ein Intervall $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$. Dann bezeichnet $C[a;b]$ die Menge der auf $[a;b]$ stetigen Funktionen.

Bemerkung und Aufgabe: $(C[a;b], +, \cdot)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Beweis bitte selbst!)

Definition:
Sei $(V;+;\cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n \in V$. Die Menge

$$\operatorname{span}(g_1, g_2, \dots, g_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

heißt der von $g_1, g_2, \dots, g_n$ *aufgespannte Untervektorraum* von V

Aufgabe: Wer will, möge sich davon überzeugen, daß $(\operatorname{span}(g_1, g_2, \dots, g_n), +, \cdot)$ tatsächlich ein Vektorraum ist .

3.1. Einführung: etwas Aussagenlogik, Quantoren, vollständige Induktion

Quelle zur Vorbereitung: [20], §§ 1, 2

Nach dem ersten Treffen im Kurs, gegenseitigem Kennenlernen und einem ersten kleinen Impulsreferat der Kursleiter über Vorstellungen von Genauigkeit (z.B. in Zitaten) begann die Kursarbeit mit einer vertiefenden Besprechung der Inhalte des Vorbereitungsblattes. Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion wurde vorgestellt, das als Axiom im Axiomsystem der natürlichen Zahlen von PEANO verankert ist.

3.2. Metriken und Normen

Quelle zur Vorbereitung: [23], Kap. 6, S. 55-57, [7], S. 8-13

Die genauigkeits-relevante Frage, die (u.a.) zur Betrachtung von Metriken und Normen führt, ist die Frage nach einem mathematischen Instrument, das es erlaubt, zu unterscheiden, wann zwei Elemente einer Menge als identisch anzusehen sind bzw. wie ihre Unterschiedlichkeit quantitativ gemessen werden kann.

Metriken

Definition: Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto d(x, y)$ heißt *Metrik* (auch: *Abstandsfunktion*), wenn gilt:

(D1) Für alle $x, y \in X$ gilt: $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$ (*Symmetrie und Nicht-Negativität*)
(D2) Für alle $x, y \in X$ gilt: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(D3) Für alle $x, y \in X$ gilt: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*Dreiecksungleichung*)

Das Paar (X, d) heißt *metrischer Raum*.

Aufgaben:
A) a) Weise nach, daß $(\mathbb{R}, d)$ ein metrischer Raum ist, wenn $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen ist und man die Abbildung d durch $d(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ definiert!
(Nachweis der Eigenschaften (D1) bis (D3) in der Definition oben!)
b) Zeige außerdem: Die Metrik d ist translationsinvariant, d.h. für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $d(a+c, b+c) = d(a,b)$!
c) Zeige ferner: Die Metrik d ist invariant gegenüber Spiegelungen am Nullpunkt, d.h. für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $d(a,b) = d(-a, -b)$

B) Gegeben ist ein metrischer Raum (X, d) und eine Teilmenge $Y \subseteq X$. Zeige, daß man dann durch Einschränkung der Abbildung d auf $Y \times Y$ eine Metrik auf der Menge Y erhält!
Diese Metrik heißt übrigens *die auf* Y *von* (X,d) *induzierte Metrik.*

C) Für jede Menge X definiert man die *triviale Metrik* durch
(1) $d(x, y) := 0$ für $x = y$ und
(2) $d(x, y) := 1$ für $x \neq y$, mit ($x, y \in X$).
Überzeuge Dich davon, daß die Eigenschaften (D1) – (D3) erfüllt sind!

Normen

Definition: Es sei V ein reeller Vektorraum. Unter einer *Norm* auf V versteht man eine Abbildung $\| . \| : V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, für die gilt:

(N1) Für alle $x \in V$ mit $x \neq 0$ gilt: $\|x\| > 0$ und $\|0\| = 0$ (*Nicht-Negativität*)
(N2) Für alle $x \in V$, $k \in \mathbb{R}$ gilt: $\|k \cdot x\| = |k| \cdot \|x\|$
(N3) Für alle $x, y \in V$ gilt: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Dreiecksungleichung*)

Das Paar (V, $\|.\|$) heißt *normierter Vektorraum*.

Satz: Es sei (V, $\|.\|$) ein normierter Vektorraum.
Dann ist $d: V \times V \to \mathbb{R}$, $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf V.

Aufgabe:
Versuche, durch Nachweis der Metrikeigenschaften (D1) bis (D3) für die Abbildung d selbst einen Beweis für diesen Satz zu finden!

Lösung:
Beweis: Nachweis der Metrikeigenschaften (D1) bis (D3) für d: Es seien $x, y, z \in V$:
(D1)*:* $d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1|\,\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x) \geq 0$ *(wegen (N2) und (N1))*
(D2)*:* $x = y \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ *(wegen (N1))*
(D3)*:* $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$ *(wegen (N3))* *q. e. d.*

Aufgabe:
Beweise, daß es sich bei den folgenden Normen tatsächlich um Normen handelt!
(Die Normeigenschaften (N1) bis (N3) sind nachzurechnen!)

1. Euklidische Norm

Für n-dimensionale Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ ... \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist durch den Ausdruck $\|v\|_E := \|v\|_2 := \sqrt{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)}$ die *euklidische Norm* auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

2. Betragssummennorm

Für n-dimensionale Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ ist durch den Ausdruck $\|v\|_S := \|v\|_1 := |v_1| + \ldots + |v_n|$ die *Betragssummennorm* auf $\mathbb{R}^n$ definiert.
Anschauliches Beispiel(für n=2): sog. Manhattandistanz *(kürzeste Verbindungsstrecke zweier Orte in einem rechtwinkligen Straßennetz).*

3. Maximumnorm

Für n-dimensionale Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ ist durch den Ausdruck $\| v \|_M := \max\left(| v_1|, ... , | v_n|\right)$die *Maximumnorm* auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Übungsaufgabe

Man kann für zwei reelle Zahlen folgendermaßen einen neuen Abstand d* definieren:
Für $a \geq 0$, $b \geq 0$ projiziert man die Punkte (a | 0) (b | 0) vom Punkt (0 | 1) auf die Winkelhalbierende w des ersten und dritten Quadranten. Der Abstand d*(a, b) sei definiert als die euklidische Entfernung der Projektionspunkte P_a und P_b, (also entlang der Winkelhalbierenden gemessen) (vgl. Abb. 3.2.1).
Für $a \leq 0$, $b \leq 0$ projiziert man entsprechend vom Punkt (0 | -1) aus.

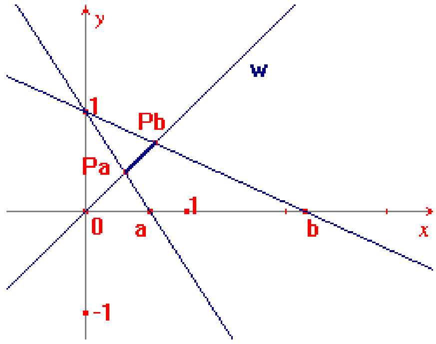

Abb. 3.2.1

a) Zeige, daß in beiden Fällen gilt: $d^*(a,b) = \sqrt{2}\dfrac{|a-b|}{(1+|a|)\cdot(1+|b|)}$:

Bestimme dazu die Schnittpunkte P_a (x_a | y_a) und P_b (x_b | y_b) der projizierten Strahlen s_a (durch (0|1) und (a|0)) und s_b (durch (0|1) und (b|0)) mit der Winkelhalbierenden w, und berechne die Entfernung P_aP_b aus den Koordinaten mit dem Satz des Pythagoras!

b) Finde heraus, wie die Definition von d* für zwei Zahlen mit unterschiedlichem Vorzeichen lauten muß. Überlege Dir dazu, wie die zugehörige Norm definiert ist!

c) Zeige, dass d* den drei Bedingungen (D1) bis (D3) für Metriken genügt!

d) Ist d* invariant gegenüber Spiegelungen am Nullpunkt und gegenüber Translationen?

e) Ist d* für Genauigkeitsbetrachtungen wohl eine geeignete Norm?

Lösung der Übungsaufgabe

a) Zu zeigen war, dass in diesen beiden Fällen gilt: $d^*(a,b) = \sqrt{2}\dfrac{|a-b|}{(1+|a|)\cdot(1+|b|)}$. (3.2.1)

Die Koordinaten der Projektionspunkte P_a und P_b bestimmt man als Schnittpunkte der Winkelhalbierenden g mit g(x)=x mit der Geraden s_a durch die Punkte (0 | 1) und (a | 0) bzw. s_b durch die Punkte (0 | 1) und (b | 0) falls $a, b \geq 0$, sowie mit der Geraden durch die Punkte (0 | -1) und (a | 0) bzw. (0 | -1) und (b | 0) falls $a, b \leq 0$. Dabei erhält man für beide Fälle die Punkte $P_a\left(\dfrac{a}{1+|a|}\middle|\dfrac{a}{1+|a|}\right)$ und $P_b\left(\dfrac{b}{1+|b|}\middle|\dfrac{b}{1+|b|}\right)$ (wobei die Beträge durch Vereinigung der beiden Fälle eingeführt werden). Der Wert d*(a, b) ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras, woraus (3.2.1) folgt.

b) Außerdem ist zu untersuchen, wie die Definition von d* ergänzt werden kann für den Fall, dass die beiden Zahlen unterschiedliches Vorzeichen haben. Sei also o. B. d. A. $a \geq 0$, $b \leq 0$: Wegen $(0 \mid 0) \in w$ ist es sinnvoll, zu definieren: d*(a,b)=d*(a,0)+d*(0,b)

Durch Einsetzen von (3.2.1) erhält man: $d^*(a,b) = \sqrt{2}\dfrac{|a|+|b|+2|ab|}{(1+|a|)\cdot(1+|b|)}$ (3.2.2)

für diesen Fall unterschiedlicher Vorzeichen von a und b.
Eine Darstellung, die alle drei Fälle von (3.2.1) und (3.2.2) umfasst, lautet:

$$d^*(a,b) = \sqrt{2}\frac{|a-b+a\cdot|b|-|a|\cdot b|}{(1+|a|)\cdot(1+|b|)} \qquad (3.2.3)$$

c) Für (3.2.3) ist nun zu zeigen, dass d^* eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist:

(D1): $$d^*(a,b) = \sqrt{2}\frac{|a-b+a|b|-|a|b|}{(1+|a|)\cdot(1+|b|)} = \sqrt{2}\frac{|b-a+b|a|-|b|a|}{(1+|b|)\cdot(1+|a|)} = d^*(b,a)$$

und offensichtlich $d^*(a,b) \geq 0$

(D2): $$d^*(a,b) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\frac{|a-b+a|b|-|a|b|}{(1+|a|)\cdot(1+|b|)} = 0 \Leftrightarrow a-b+a|b|-|a|b = 0$$

Falls a und b von Null verschieden sind und verschiedene Vorzeichen haben, hat die Gleichung keine Lösung, weil dann alle Summanden das gleiche Vorzeichen haben. Also haben a und b das gleiche Vorzeichen, woraus

$a\,|\,b\,| = |\,a\,|\,b$ folgt. Damit ist $a + a\,|\,b\,| = b + |\,a\,|\,b$ genau dann erfüllt, wenn a=b.

Ist umgekehrt a = b, so ist offensichtlich $d^*(a,b) = 0$.

(D3): $d^*(a,b) = \|P_a - P_b\|_E$; $d^*(a,c) = \|P_a - P_c\|_E$; $d^*(b,c) = \|P_b - P_c\|_E$; nach Definition. Aufgrund der Dreiecksungleichung der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^n$ gilt die Dreiecksungleichung auch für d*.

d) Die Metrik ist nun auf Invarianz gegenüber Spiegelungen am Nullpunkt und gegenüber Translationen zu untersuchen:
Aus allen a ∈ ℝ wird bei Spiegelung am Nullpunkt -a. Es gilt:

$$d^*(a,0) = \sqrt{2}\,\frac{|\,a - 0 + a\,|\,0\,| - |\,a\,|\,0\,|}{(1 + |\,a\,|)\cdot(1 + |\,0\,|)} = \sqrt{2}\,\frac{|\,|-1|\cdot(-a + 0 - a\,|\,0\,| + |\,a\,|\,0\,|}{(1 + |\,-1\,|\cdot|-a|)\cdot(1 + |\,0\,|)} = d^*(-a,0),$$ was eine Invarianz von d* gegenüber Spiegelungen am Nullpunkt darstellt.

Die Invarianz bezüglich der Translation widerlegt man mit einem Gegenbeispiel:

$$d^*(0,2) = \sqrt{2}\,\frac{|\,2\,|}{1 + |\,2\,|} \neq \sqrt{2}\,\frac{|\,2 - 1\,|}{(1 + |\,2\,|)\cdot(1 + |\,1\,|)} + \sqrt{2}\,\frac{|\,0 - 1\,|}{(1 + 0)\cdot(1 + |\,1\,|)} = d^*(2,1) + d^*(0,1)$$

e) *Im Anschluss an diese Übung wurde im Kurs diskutiert, inwiefern diese Metrik für Genauigkeitsbetrachtungen geeignet ist. Weil die Metrik nicht translationsinvariant ist, dürften sich bei manchen Genauigkeitsbetrachtungen Unübersichtlichkeiten und Anpassungsprobleme ergeben.*

3.3. Skalarprodukt, Cauchy-Schwarz-Ungleichung; Umgebungen

Quelle zur Vorbereitung: [23], Kap. 6, S. 55-60

Der Begriff der ε-Umgebung ist wichtig für so manche Genauigkeitsbetrachtung und daher das Ziel dieses Vortrags.

Definition: Es sei V ein Vektorraum. Eine Abbildung $\sigma: V \times V \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto \sigma(x,y)$ heißt *bilineares, symmetrisches, positiv definites Skalarprodukt*, wenn gilt:

Für alle k, l ∈ ℝ und für alle x,y,z ∈V ist: $\sigma(kx + ly, z) = k\,\sigma(x,z) + l\,\sigma(y,z)$ (σ bilinear)

$\sigma(x, ky + lz) = k\,\sigma(x,y) + l\,\sigma(x,z)$ (σ symmetrisch)

$\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$ (σ positiv definit)

Für alle $x \neq 0$ ist $\sigma(x,x) > 0$

Satz: Für einen Vektorraum V und ein Skalarprodukt σ auf V gilt:
Durch $\|\,x\,\| := \sqrt{\sigma(x,x)}$ wird eine Norm auf V definiert.

Beweis: Es sei $x \in V$. (N1): $\|\,x\,\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sigma(x,x)} = 0 \Leftrightarrow \sigma(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2): $\|kx\|^2 = \sigma(kx,kx) = |k|^2 \cdot \sigma(x,x) = |k|^2 \cdot \|\,x\,\|^2 \Rightarrow \|kx\| = |k| \cdot \|\,x\,\|$

um (N3) zu nachzuweisen, benötigt man die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung:*

$\forall\, x, y \in V: \quad \sigma(x,y) \leq \|\,x\,\| \cdot \|\,y\,\|$ (3.3.1)

Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

Falls y=0, gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung trivialerweise. Es sei (mit $y \neq 0$) $p := \dfrac{\sigma(x,y)}{\sigma(y,y)} \cdot y$ die sog. *orthogonale Projektion* von x auf y und h := x – p das sog. *Lot* von x auf y.

Dann gilt: $0 \le \sigma(h,h)$

$$= \sigma(x-p, x-p)$$
$$= \sigma(x,x) - 2\sigma(x,p) + \sigma(p,p)$$

(nach Definition von p) $= \sigma(x,x) - 2\dfrac{\sigma(x,y)}{\sigma(y,y)}\sigma(x,y) + \dfrac{\sigma(x,y)^2}{\sigma(y,y)^2}\sigma(y,y)$

$$= \frac{\sigma(x,x)\sigma(y,y) - \sigma(x,y)^2}{\sigma(y,y)}$$

Damit: $\sigma(x,y)^2 \le \sigma(x,x)\sigma(y,y)$. Durch Wurzelziehen ergibt sich (3.3.1). q.e.d.

Anmerkung: Ein Gleichheitszeichen steht in (3.3.1) genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: $\sigma(x,y)^2 = \sigma(x,x)\cdot\sigma(y,y) \Leftrightarrow h = 0 \Leftrightarrow x = p \Leftrightarrow x = \dfrac{\sigma(x,y)}{\sigma(y,y)}\cdot y$

„$\Leftarrow$“: Gegenrichtung: Wenn x und y linear abhängig sind, gibt es ein geeignetes γ, so daß $x = \gamma\cdot y$.

Daraus folgt: $\sigma(x,y) = \gamma\cdot\sigma(y,y)$

$\Rightarrow$ $x = \dfrac{\sigma(x,y)}{\sigma(y,y)}\cdot y$ (siehe Äquivalenz in „$\Rightarrow$“))

$\Leftrightarrow$ $\sigma(x,y)^2 = \sigma(x,x)\cdot\sigma(y,y)$

q.e.d.

Fortsetzung im Beweis der Normeigenschaften:

$$\text{(N3)}: \|x+y\|^2 = \sigma(x+y, x+y) = \sigma(x,x) + 2\cdot\sigma(x,y) + \sigma(y,y)$$
$$\le \sigma(x,x) + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \sigma(y,y)$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

q.e.d.

Beispiele und Aufgaben:

A) Zu den beiden Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist das *kanonische Skalarprodukt*

$\sigma(x,y) := \langle x,y \rangle$ wie folgt definiert: $\langle x,y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$

Die dazugehörige Norm ist die euklidische Norm: $\|x\|_E = \sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Rechne dies nach!

Dazu gehört wiederum die *euklidische Metrik* auf $\mathbb{R}^n$: $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$

Begründe, warum zwischen der euklidischen Norm und der Maximum-Norm (siehe 3.2.) die folgende Beziehung gilt: $\|x\|_M \le \|x\|_E \le \sqrt{n}\cdot\|x\|_M$ (3.3.2)

B) Zu einer Menge X sei B(X) definiert als der *Vektorraum aller beschränkten, reellwertigen Funktionen auf* X, also aller Funktionen $f: X \to \mathbb{R}$ mit $\sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty$. Dann gilt der folgende

Satz: $\|.\|_\infty$ mit $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ ist eine Norm auf B(X).

Aufgabe: Beweise diesen Satz!

Lösung:

Beweis: (N1) und (N2) sind klar. Zu (N3):

$$\|f+g\|_\infty = \sup\{|f(x)+g(x)| : x \in X\} \le \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \in X\}$$
$$\le \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

q.e.d.

C) **Satz:** Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und C[a,b] der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt: Für jede reelle Zahl $p \ge 1$ ist durch $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ eine Norm gegeben, die *p - Norm* auf C[a,b] heißt.

Beweis: Wieder sind (N1) und (N2) offensichtlich.

(N3) beruht auf der *Minkowskischen Ungleichung*, die im Kurs nicht behandelt wurde.

Offene Kugeln und Umgebungen

Definition: Gegeben sei ein metrischer Raum (X,d) , $a \in X$ und $\varepsilon > 0$. Die *offene Kugel* B(a,ε) *um den Punkt* a *mit dem Radius* ε ist definiert als: $B(a, \varepsilon) := \{ x \in X : d(a, x) < \varepsilon \}$

Definition: Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung des Punktes* $x \in X$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Insbesondere ist B(x,ε) selbst eine Umgebung von x , die sogenannte ε-*Umgebung* von x.

Aufgabe: A) Im $\mathbb{R}^2$ können offene Kugeln bzw. ε-Umgebungen je nach Metrik recht unterschiedlich aussehen. Skizziere jeweils die Einheitskugeln B((0|0),1) für die zur Maximumnorm, zur Betragssummennorm und zur euklidischen Norm gehörigen Metriken!

B) Überlege, welche Form die Einheitskugeln B((0|0|0),1) jeweils im $\mathbb{R}^3$ haben!

Lösung: A) Abb. 3.3.1 zeigt B(a,ε) ($a \in \mathbb{R}^2$) für die zur Maximumnorm gehörige Metrik, Abb. 3.3.2 B(a,ε) für die zur Betragssummennorm gehörige Metrik und in Abb. 3.3.3 ist B(a,ε) für die euklidische Metrik skizziert.

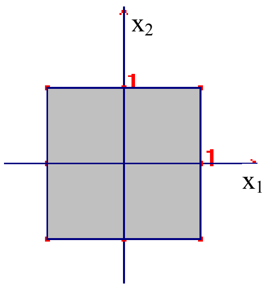

Abb. 3.3.1

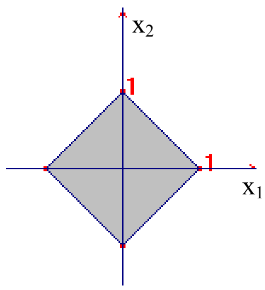

Abb. 3.3.2

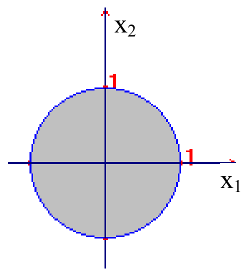

Abb. 3.3.3

B) Im $\mathbb{R}^3$ haben die Einheitskugeln die Form eines Würfels (Maximumnorm), eines Oktaeders (Betragssummennorm) bzw. einer Kugel (euklidische Norm)

3.4. Offene und abgeschlossene Mengen, Topologie

Quelle zur Vorbereitung: [23], Kap. 6, S. 55-63, [20], §13 S. 1

Die Fortsetzung der Gedanken von 3.3 erlaubt einen Einblick in die Topologie mit ihren besonderen genauigkeits-spezifischen Sichtweisen.

Offene Teilmengen

Definition: (X,d) sei ein metrischer Raum.
$U \subset X$ heißt *offen*, wenn die Menge U Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h. Für alle $x \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset U$

Beispiele und Aufgaben: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Dann ist das Intervall]a,b[in $\mathbb{R}$ offen, denn für jedes $x \in]a,b[$ gibt es ein ε, so dass $B(x, \varepsilon) =]x-\varepsilon , x+\varepsilon[\subset]a,b[$.
(Man setzt z.B. ε :=min (b-x, x-a).)
]a, ∞[und]-∞,a[sind offen. Warum? Schreibe die Begründung auf!
Begründe auch, warum [a,b] und [a,b[nicht offen sind!
Lösung: Für x = a gibt es kein ε >0, so dass $B(x, \varepsilon) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ ganz im jeweiligen Intervall enthalten wäre.

Bemerkung: In $\mathbb{R}^n$ erhält man mit der euklidischen und mit der Maximum-Norm denselben Begriff einer offenen Menge, d.h. jede bezüglich der euklidischen Norm offene Menge ist auch bezüglich der Maximum-Norm offen und umgekehrt.
Beweisidee: Bezeichnet man die ε-Umgebungen mit

$B(a, \varepsilon) := \{x \in X \mid \|a-x\|_E < \varepsilon\}$ für die euklidische Norm bzw.
$B'(a, \varepsilon) := \{x \in X \mid \|a-x\|_M < \varepsilon\}$ für die Maximum-Norm, dann gilt:

$B'(a, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) \subseteq B(a,\varepsilon) \subset B'(a, \varepsilon)$ (man benutzt 3.3.2)

Damit gibt es für jede „euklidische Kugel" eine in ihr enthaltene „Supremum-Kugel" und umgekehrt. Deshalb enthält jede bezüglich der euklidischen Norm offene Menge U für jedes $x \in U$ auch eine „Supremum-Kugel". Das bedeutet, dass U auch offen bezüglich der Supremum-Metrik ist (entsprechend auch die umgekehrte Richtung).

Aufgabe: Versuche, diese Beweisidee genauer aufzuschreiben und einen richtigen, lückenlosen Beweis daraus zu machen! Überlege Dir, ob eine ähnliche Aussage wie die in der Bemerkung oben auch für Maximum-Norm und Betragssummen-Norm gilt! (ggf. Beweis!) (Beschränke Dich, wenn Du willst, auf den $\mathbb{R}^2$ oder den $\mathbb{R}^3$!)

Satz 3.4.1:
Es sei wieder (X,d) ein metrischer Raum. Es gilt:

i) {} und X sind offen.

ii) $U,V \subset X$ sind offen $\Rightarrow$ $U \cap V$ ist offen.
Damit auch: Der Durchschnitt endlich vieler offener Teilmengen von X ist wieder offen.

iii) Sei I eine beliebige Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Teilmengen von X. Dann gilt:
Die Vereinigungsmenge $\bigcup_{i \in I} U_i$ ist wieder offen.

(*im Kurs ohne Beweis, nur eine Beweisskizze durch die Kursleiter*)

Aufgabe: Beweise möglichst viele der Aussagen von Satz 3.4.1!

Anmerkung und Aufgabe: Für unendlich viele offene Mengen muss die Schnittmenge nicht offen sein.
Finde ein Beispiel dafür!

Lösung: Zum Beispiel: $\bigcap_{n \in N}]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[= [0,1]$ ist nicht offen, aber alle Intervalle, aus denen die Schnittmenge gebildet wird, sind offen.

Abgeschlossene Teilmengen

Definition: Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt *abgeschlossen*, wenn X \ A offen ist.

Beispiele: Es seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$
Dann ist [a,b] abgeschlossen in $\mathbb{R}$, denn $\mathbb{R} \setminus [a,b] =]-\infty,a[\cup]a,\infty[$ ist offen. (nach Satz 3.4.1 iii))
$[a, \infty[$ und $]-\infty,a]$ sind abgeschlossen, denn $\mathbb{R} \setminus [a, \infty[=]-\infty,a[$ und $\mathbb{R} \setminus]-\infty,a] =]a, \infty[$ sind offen.

Topologie

Definition: X sei eine Menge, $P(X)$ sei die Menge aller Teilmengen von X, die sogenannte *Potenzmenge von* X; außerdem $T \subset P(X)$
T heißt *Topologie*, falls gilt:

i) $\{\}, X \in T$

ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle Mengen $G_1,..., G_n \in T$: $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in T$.
(Der Durchschnitt endlich vieler Elemente von T ist ebenfalls Element von T).

iii) Sei I eine beliebige Indexmenge, $G_i \in T$ für alle $i \in I$. Dann gilt: $\bigcup_{i \in I} G_i \in T$.
(Die Vereinigungsmenge beliebig vieler Elemente von T ist ebenfalls Element von T).

Satz 3.4.2: Für einen metrischen Raum (X,d) ist $T := \{ A \subset X \mid A \text{ ist offen bezüglich } d\}$ eine Topologie.

Beweis: Überprüfung der Kriterien aus der Definition der Topologie:

i) $\{\}, X \in T$ nach Satz 3.4.1 i)

ii) Seien $A_1,...,A_n \in T$. Dann sind die A_i, $1 \leq i \leq n$, nach Definition von T offen und nach Satz 3.4.1 ii) auch $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ offen. Damit gilt: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in T$.

iii) Seien I eine Indexmenge und $A_i \in \mathrm{T} \ \forall i \in I$. Dann sind alle A_i offen, damit ist nach Satz 4.1 iii) auch $\bigcup_{i\in I} A_i$ offen. Also: $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathrm{T}$. q.e.d.

Aufgaben:
A) Überlege Dir möglichst verschiedenartige Beispiele für offene und abgeschlossene Mengen im $\mathbb{R}^2$!
B) Was ist die „kleinste“ Topologie für jede beliebige Menge X ?

Hier bietet sich ein kurzer Ausblick auf Sichtweisen der Topologie zum Kursthema an. Die Beweisskizze für Satz 3.4.1 kann in diese Gedanken einführen.

3.5. Folgen, d-Konvergenz von Folgen

Quelle zur Vorbereitung: Eigene Zusammenstellung von Definitionen, Beispielen, Sätzen (4seitig); [23], Kap. 6, S. 55,56

In diesem und dem folgenden Vortrag sind grundlegende Genauigkeits-Konzepte enthalten, auf denen letztlich auch die numerische Näherung bestimmter reeller Zahlen aufbaut.

Definition: Eine Abbildung $\chi: \mathbb{N} \to X,\ n \mapsto x_n := \chi(n)$ heißt *Folge in* X.
Die Bildmenge von χ wird mit $(\ \chi(n): n \in \mathbb{N}\ )$ oder $(x_n: n\in\mathbb{N})$ notiert und ebenfalls als *Folge* bezeichnet.

Beispiel: $\chi: \mathbb{N} \to X,\ n \mapsto x_n := \chi(n) := n^2$; kompakter geschrieben als $(\ n^2 : n\in\mathbb{N})$, d.h. $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=9$, ...

Definition: Sei X eine Menge, (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n: n\in \mathbb{N})$ in X heißt d-*konvergent in* (X,d) *gegen ein* $x\in X$, wenn es ein $x\in X$ gibt, so dass gilt: Für jedes auch noch so kleine $\varepsilon > 0$ kann man ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ finden, so daß $d(x, x_n) < \varepsilon$ ist für alle $n \geq N_\varepsilon$

Beispiele und Aufgaben:
A) Sei $X = \mathbb{R}$; $d(x, y) := \left| x - y \right|$ für $x,y \in \mathbb{R}$.

1. Die konstante Folge $(1: n\in \mathbb{N})$ ist trivialerweise d-konvergent.
2. $(\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N})$ konvergiert gegen $0\in \mathbb{R}$. Versuche, dies zu beweisen!

Lösung:
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben. Zu zeigen ist: Es gibt ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Da man stets ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ finden (und angeben) kann, ist die Behauptung bewiesen.

3. Die Folge $(x_n: n\in \mathbb{N})$ mit $x_n := (1+\frac{1}{n})^n$ konvergiert gegen ein $x_0\in \mathbb{R}$, das man die *eulersche Zahl* e nennt.

Beweis: Wir zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x = \exp(x)$. Sei x' ≠ 0 und x beliebig :

$$\frac{1}{x'} = \frac{d}{dx'}\cdot\log(x') = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x'+h)-\log(x')}{h} \qquad \Big| \text{ setze } h = \tfrac{x}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x'} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(x'+\frac{x}{n})-\log(x')}{\frac{x}{n}} \qquad \Big| \text{ setze } x' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+\frac{x}{n})-0}{\frac{x}{n}} = \lim_{n\to\infty}\tfrac{n}{x}\log(1+\tfrac{x}{n}) = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\log(1+\tfrac{x}{n})^n \Leftrightarrow x = \lim_{n\to\infty}\log(1+\tfrac{x}{n})^n$$

$$\Leftrightarrow e^x = \exp(\lim_{n\to\infty}\log(1+\tfrac{x}{n})^n) = \lim_{n\to\infty}\exp(\log(1+\tfrac{x}{n})^n)\cdots\Big| \text{ aufgrund der Stetigkeit der exp - Funktion}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{x}{n})^n$$

für x = 1 folgt die Behauptung. q.e.d.

B) Gegeben ist C[0;1] (der Raum aller stetigen Funktionen auf dem Intervall [0;1]) und die Folge von stetigen Funktionen $f_n(x) := \begin{cases} -nx+1 & \text{für } x \in [0; \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, sowie $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ($f \notin C[0;1]$)

Behauptung: Für ein gegebenes $x \in [0;1]$ konvergiert $(f_n(x) : n_\varepsilon \in \mathbb{N})$ gegen f(x), d.h. f_n konvergiert *punktweise* gegen f. Beweise diese Behauptung!

Lösung:

Beweis: 1. Fall: für x=0 offensichtlich erfüllt;

2. Fall: $x \neq 0$. Dann gibt es offenbar ein $N \in \mathbb{N}$ mit: $f_n(x)=0 \;\; \forall n \geq N \;\; \Rightarrow \;\; d(f, f_n) = 0 \; \forall n \geq N$. q.e.d.

Behauptung: Bezüglich der *Supremumsmetrik* d_∞ (mit $d_\infty(f; g) := \| f - g \|_\infty$) konvergiert $(f_n: n \in \mathbb{N})$ in C[0;1] <u>nicht</u> (insbesondere nicht gegen f). Versuche, diese Behauptung zu begründen!

Lösung:

Begründung: $\|f(x)-f_n(x)\|_\infty=1$ für alle $x \in [0;1]$

(wählt man x nur genügend nahe an 0, so ist $f_n(x)$ immer „fast 1“

und f(x)=0, $\Rightarrow \sup\limits_{x \in [0;1]} (f_n(x)-f(x))=1$)

$(f_n: n \in \mathbb{N})$ ist daher bezüglich d_∞ nicht konvergent gegen f.

3.6. d-Cauchy-Folgen und d-Konvergenz

Quelle zur Vorbereitung: Eigene Zusammenstellung von Definitionen, Beispielen, Sätzen (4seitig); [23], Kap. 6, S. 55,56

Interessant im Hinblick auf Genauigkeitsbetrachtungen ist in diesem Vortrag, dass zwei Genauigkeitskonzepte im Falle eines vollständigen metrischen Raumes als äquivalent erkannt werden.

Definition: Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n: n \in \mathbb{N})$ in X heißt d-*Cauchy-Folge*, wenn gilt:
Für alle (noch so kleinen) reellen Zahlen $\varepsilon > 0$ kann man ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ angeben, so daß $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\varepsilon$ ist.

Aufgabe: Finde drei Beispiele für d-Cauchy-Folgen und vergewissere Dich, dass die Bedingung in der Definition erfüllt ist!

Der Zusammenhang zwischen d-konvergenten und d-Cauchy-Folgen ergibt sich wie folgt:

Satz: Jede gegen ein $x \in X$ d-konvergente Folge $(x_n: n \in \mathbb{N})$ in X ist eine d-Cauchy-Folge.

Beweis: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß: $d(x, x_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$
($(x_n: n \in \mathbb{N})$ konvergente Folge nach Voraussetzung)
Sei nun ε beliebig vorgegeben; dann gilt: Es gibt ein $N_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$: $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N_{\varepsilon/2}$
Mit beliebigen $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N_{\varepsilon/2}$ gilt: $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ und gleichzeitig $d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$
Also: $d(x_n, x_m) \leq d(x, x_n) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ *(Dreiecksungleichung der Metrik)*
$\varepsilon > 0$; $n, m > N_\varepsilon$ waren beliebig, also gilt:
Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\varepsilon$.
Also ist $(x_n : n \in \mathbb{N})$ d-Cauchy-Folge. q.e.d.

Definition: (X,d) heißt *vollständig*, wenn es für jede d-Cauchy-Folge $(x_n: n \in \mathbb{N})$ in X ein $x \in X$ gibt, so dass $(x_n: n \in \mathbb{N})$ in (X,d) gegen x konvergiert.

Satz: In einem vollständigen metrischen Raum (X,d) gilt:
$(x_n: n \in \mathbb{N})$ ist d-konvergente Folge $\Leftrightarrow$ $(x_n: n \in \mathbb{N})$ ist d-Cauchy-Folge

Beweis: folgt unmittelbar aus dem obigen Satz und der Definition der Vollständigkeit.

Beispiele und Aufgaben:

A) Der metrische Raum ($\mathbb{Q}$,d) der rationalen Zahlen mit d(x,y) = | x - y | für x , y $\in$ $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig. Versuche, dies durch ein Dir bekanntes Beispiel zu zeigen!
Lösung:
Beispielsweise konvergiert nach Beispiel A.3 in 3.5 die Folge (x_n: $n\in\mathbb{N}$) mit $x_n := (1+\frac{1}{n})^n$ nicht in $\mathbb{Q}$ ($e\notin\mathbb{Q}$).
Zu zeigen bleibt: Die Folge (x_n: $n\in\mathbb{N}$) ist d-Cauchy-Folge in ($\mathbb{Q}$,d): Dies ist der Fall, weil sie in ($\mathbb{R}$,d) konvergent ist, daher auch d-Cauchy-Folge in ($\mathbb{R}$,d) und damit: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$, so daß $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\varepsilon$ gilt.
$x_n\in\mathbb{Q}$ für alle $n\in\mathbb{N}$, daher ist (x_n: $n\in\mathbb{N}$) auch in ($\mathbb{Q}$,d) d-Cauchy-Folge.

B) Sei X= C[0;1] mit f, d_∞ , $\| f \|_\infty$, (f_n: $n\in\mathbb{N}$) wie in Beispiele und Aufgaben B) in 3.5.
Sei außerdem $d_1(f; g) := \int_0^1 |\, f(x) - g(x) \,| \, dx$ die 1-*Norm-Metrik* und $d_2(f; g) := \int_0^1 (\, f(x) - g(x) \,)^2 \, dx$
die Metrik zur *euklidischen* Norm auf X.

Behauptung: Bezüglich d_1 und d_2 ist (f_n: $n\in\mathbb{N}$) d-Cauchy-Folge. Begründe dies!
Lösung:
Begründung: (f_n: $n\in\mathbb{N}$) konvergent gegen f, denn der Flächeninhalt unter f_n - f strebt gegen 0 für $n\to\infty$.

Folgerung: (C[0;1],d_1) ist nicht vollständig, denn es gilt $f\notin C[0;1]$.
Im Gegensatz dazu ist (C[0;1],d_∞) vollständig, da jede d_∞-Cauchy-Folge in (C[0;1],d_∞) gegen ein stetiges $g \in C[0;1]$ konvergiert. Beweise dies!
Lösung: *(Beweis in den Unterlagen zur Vorbereitung)*

C) Gegeben sei die Folge (n: $n\in\mathbb{N}$) und der metrische Raum ($\mathbb{R}$,d_a) mit der Metrik $d_a(x,y)=|\arctan(x)-\arctan(y)|$ *(hier kein Beweis der Metrikeigenschaften der Arkustangensmetrik)*.
($\mathbb{R}$,d_a) ist nicht vollständig, da (n: $n\in\mathbb{N}$) gegen kein $x\in\mathbb{R}$ konvergiert, aber (n: $n\in\mathbb{N}$) dennoch d_a-Cauchy-Folge ist, wegen: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$, so daß $d_a(f_n, f_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\varepsilon$ ist. (für $n,m\to\infty$: $|\arctan(x_n) - \arctan(x_m)| \to 0$, weil arctan(x) für $x\to\infty$ gegen $\pi/2$ konvergiert).

Zusatzaufgabe: Suche für die Beispiele A)-C) graphische Veranschaulichungsmöglichkeiten!