

3.7. Überblick über die axiomatische Grundlegung der reellen Zahlen

Quelle: [20], §§ 2, 3.b

Von Peano (1889) stammt eine Axiomatische Theorie der natürlichen Zahlen. Als undefinierte Begriffe verwendet er „natürliche Zahl“, „Eins“ (i. Z. „1“), die „Nachfolgerbeziehung“ (x ist Nachfolger von y , notiert mit $x=y^+$), „Gleichheit“. Peano stellt 5 Axiome auf:

P1: Eins ist eine natürliche Zahl.

P2: Zu jeder natürlichen Zahl y gibt es genau eine natürliche Zahl x mit $x=y^+$.

P3: Für jede natürliche Zahl ist ihr Nachfolger ungleich Eins.

P4: Ungleiche natürliche Zahlen haben ungleiche Nachfolger.

P5: (Induktionsaxiom) Für jede Aussageform $A(x)$ für natürliche Zahlen gilt:

Gilt $A(1)$ und folgt $A(x^+)$ aus $A(x)$, so gilt $A(y)$ für jede natürliche Zahl y .

Man definiert $2:=1^+$; $3:=2^+$; $4:=3^+$...

Eine andere Möglichkeit, die natürlichen Zahlen zu definieren, baut auf dem Axiomensystem der Mengenlehre auf. Man definiert hier: $0:=\emptyset$; $1:=\{\emptyset\}$; $2:=\{\emptyset;\{\emptyset\}\}$; $3:=\{\emptyset;\{\emptyset;\{\emptyset\}\}\}$... und erhält ohne weitere Axiome die natürlichen Zahlen.

Auch die reellen Zahlen kann man entweder axiomatisch einführen oder ausgehend von den Axiomen der Mengenlehre definieren.

Auf ersterem Wege postuliert man die Existenz einer Menge $\mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen „+“ und „·“, die die sogenannten Körperaxiome von $\mathbb{R}$ erfüllen sollen (d.h. $(\mathbb{R},+)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind kommutative Gruppen, außerdem gilt das Distributivgesetz, ferner wird die Existenz positiver Zahlen und die Abgeschlossenheit der Menge der positiven reellen Zahlen bezüglich „+“ und „·“ gefordert und schließlich enthält das sog. *Vollständigkeitsaxiom* die Forderung, dass jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke besitzt).

Der zweite Weg führt von den natürlichen Zahlen über die Definition der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und von dort weiter zur Definition von deren Quotientenkörper $\mathbb{Q}$. Schließlich betrachtet man d -Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ (d bezeichne die normale Betragsmetrik). Man nennt zwei solche d -Cauchy-Folgen *gleich*, wenn sie den gleichen Grenzwert haben und fasst $\mathbb{R}$ als die Menge aller durch diese Cauchy-Folgen repräsentierten Grenzwerte auf.

Ausführlichere Darstellungen zu den einzelnen Inhalten dieses Abschnitts finden sich in [20] und anderen einführenden Werken.

3.8. Näherung von π und $\sqrt{2}$ durch Folgen; numerische Umsetzbarkeit

Quelle zur Vorbereitung: [10], S. 182-199

Dieser Vortrag berichtet von konkreten numerischen Verfahren zur möglichst genauen Angabe von π und $\sqrt{2}$.

Die Kreiszahl π

Das Problem der Berechnung des Kreisumfangs des Einheitskreises, also von π , hat das Mathematiker des Altertums in hohem Maße herausgefordert.

Im Alten Testament steht $\pi = 3$ als Wert für die Kreiszahl. Die Babylonier arbeiteten mit dem Wert $\pi = 3,125$, die Ägypter mit $\pi = 3,1604...$. Eine der besten Näherungen für π in China geht auf ZU CHONG-ZHI (430-501) zurück, der den Wert $355/113 = 3,1415929$, d.h. sieben richtige Ziffern, angibt.

ARCHIMEDES findet als erster eine mathematisch korrekte Lösung des Problems. Er konstruiert eine Folge von regelmäßigen Näherungspolygonen, die dem Kreis einbeschrieben sind, und eine andere Folge von dem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen Polygonen. Diese Näherung führt er für ein paar Schritte lang durch und erhält den numerischen Wert 3,141031951 mit vier richtigen Anfangsziffern. Mit dieser Methode hätte Archimedes mit weiteren Rechenschritten auf einen noch genaueren Wert für π kommen können.

Einige Mathematiker des Mittelalters und der Renaissance fanden weitere Näherungsverfahren für π .

Ansatz von J. MACHIN zur Näherung von π

Im Jahre 1706 entdeckt JOHN MACHIN einen rechnerisch gut gangbaren Weg für die Darstellung von π als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen. Ausgangspunkt ist die Arkustangensreihe

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (3.8.1)$$

Einsetzen von $x = 1$ liefert eine einfache Formel für $\frac{\pi}{4}$. Wegen $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ gilt:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots \quad (\text{Ansatz von J. GREGORY und G.W. LEIBNIZ}) \quad (3.8.2)$$

Leider konvergiert diese Reihe sehr langsam und ist damit für Näherungsberechnungen eher unbrauchbar. MACHIN beschleunigt durch einen Trick die Konvergenz von (3.8.2) erheblich:

Es sei β der eindeutig bestimmte Winkel kleiner als $\frac{\pi}{4}$, so daß $\tan \beta = \frac{1}{5}$, also $\beta = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$

Mit dem Additionstheorem der Tangensfunktion

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad \text{erhält man: } \tan(2\beta) = \frac{2 \tan \beta}{1 - (\tan \beta)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12} \quad (3.8.3)$$

$$\text{und weiter: } \tan(4\beta) = \frac{2 \tan(2\beta)}{1 - (\tan(2\beta))^2} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} \quad (3.8.4)$$

Aus dem letzten Ergebnis sieht man, dass $\tan(4\beta) \approx 1$ und deshalb $4\beta \approx \frac{\pi}{4}$. Nun kann man den Tangens der Differenz zwischen diesen beiden Winkeln wiederum berechnen:

$$\tan\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(4\beta) - 1}{1 + \tan(4\beta)} = \frac{\frac{1}{119}}{\frac{239}{119}} = \frac{1}{239} \quad (3.8.5)$$

$$\text{Daraus folgt: } 4\beta - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239}, \quad (3.8.6)$$

und nach $\frac{\pi}{4}$ aufgelöst erhält man mit der Definition von β das Endergebnis

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \quad (3.8.7)$$

Die Berechnung von π nach dieser Formel (und der Arkustangensreihe) konvergiert weitaus schneller als (3.8.1).

Im 20. Jahrhundert wird es immer schwieriger, den Genauigkeitsrekord für die Berechnung von π zu brechen - bis die Phase der Stagnation mit der Verfügbarkeit von Computern endet. Es ist nun verhältnismäßig einfach, (3.8.7) mit einem Computer bis zu 1000 Nachkommastellen auszuwerten. Eine Liste der ersten 100 000 Stellen von π wird beispielsweise 1962 von SHANKS und WRENCH veröffentlicht.

Die Quadratwurzel von zwei

Näherungsverfahren durch Kettenbruchentwicklung

Man kann mit Hilfe einer Kettenbruchentwicklung $\sqrt{2}$ als eine Art Grenzwert darstellen.

Beispiel für das Prinzip der Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{57}{17} = 3 + \frac{6}{17} = 3 + \frac{1}{\frac{17}{6}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{5}{6}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{6}{5}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} \quad (3.8.8)$$

Auf diese Weise kann man jede rationale Zahl als Kettenbruchentwicklung schreiben. Die Kettenbruchentwicklung rationaler Zahlen ist endlich (hier ohne Beweis). Für das Beispiel schreibt man in abkürzender Schreibweise:

$$\frac{57}{17} = 3 + [2, 1, 5] \quad (3.8.9)$$

$$\text{Dieses Verfahren soll auf } \sqrt{2} \text{ angewendet werden. Man beginnt mit der Gleichung } x^2 + 2x - 1 = 0. \quad (3.8.10)$$

$$\text{Diese Gleichung hat die positive Lösung } x = \sqrt{2} - 1 < 1 \quad (3.8.11)$$

$$\text{Gleichung (3.8.10) kann man (für } x \neq -2) \text{ umschreiben zu } x = \frac{1}{2+x}. \quad (3.8.12)$$

Ersetzen von x auf der rechten Seite von (3.8.12) durch $\frac{1}{2+x}$ liefert $\frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}$

Wiederholt man diesen Schritt, so erhält man:

$$\sqrt{2} - 1 = x = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = [2, 2, 2, 2, \dots] \quad (3.8.13)$$

Also ergibt sich für $\sqrt{2}$ die (unendliche) Entwicklung: $\sqrt{2} = 1 + [2, 2, 2, 2, \dots]$ (3.8.14)

$\sqrt{2}$ ist somit der Grenzwert der Folge: $1 + [2] = 1.5$; $1 + [2, 2] = 1.4$; $1 + [2, 2, 2] = 1.416 \dots$; ... etc.

Mithin besitzt $\sqrt{2}$ eine regelmäßige, periodische, rekursive (!) Kettenbruchentwicklung, während beispielsweise die Darstellung von $\sqrt{2}$ als Dezimalbruch wie eine völlig ungeordnete Abfolge von Dezimalen aussieht. Die Darstellung als Dezimalbruch kann ja nie periodisch werden, weil andernfalls $\sqrt{2}$ rational wäre.

Newton-Verfahren

Gegeben ist die Funktion N mit $N(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$. Die Wurzeln von 2 sind gerade die *Fixpunkte* von N (d.h.

Zahlen x , für die $x = N(x)$ erfüllt ist), denn: $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2$.

Mit Hilfe von N definiert man durch $x_{n+1} = N(x_n) = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ rekursiv eine Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$. Diese

Folge konvergiert (für beliebige Startwerte x_0) schnell gegen $\sqrt{2}$. Haben die x_n die Größenordnung von $\sqrt{2}$ erreicht, verdoppelt sich mit jedem Iterationsschritt die Anzahl der richtigen Nachkommastellen.

Diese Verfahren (und andere) kann man am Rechner in Näherungsprogrammen anwenden lassen (siehe hierzu auch [21] für den Kurs der Schülerakademie)

Aufgaben:

- Verwende das Kettenbruchverfahren, um $\sqrt{2}$ zu nähern! Führe die ersten 10 Schritte mit dem Taschenrechner durch (alternativ: schreibe ein Computerprogramm, das die Arbeit für Dich erledigt)!
- Verwende das Newton-Verfahren, um $\sqrt{2}$ zu nähern! Führe die ersten 10 Schritte mit dem Taschenrechner durch (alternativ: schreibe ein Computerprogramm, das die Arbeit für Dich erledigt)!
- Führe den Ansatz von Gregory und Leibniz für die Näherung von π möglichst weit durch (ggf. Computereinsatz)!
- Verschaffe Dir einen Überblick über weitere historische Näherungswerte und Näherungsverfahren von π !
- Informiere Dich über Monte-Carlo-Methoden zur Näherung von π und schreibe ein Computerprogramm, das π auf diese Weise nähert!

3.9. Der Approximationssatz von Weierstraß

Quelle zur Vorbereitung: [7], S. 1-7

Nachdem in 3.8 Zahlenwerte genähert wurden, handelt 3.9 von einem Näherungsverfahren für auf einem Intervall $[a, b]$ stetige Funktionen.

Satz: (Approximationssatz von Weierstraß)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gilt für jedes $f \in C[a, b]$ (Menge der auf dem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktionen): Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom p , so dass gilt: Für alle $x \in [a, b]$: $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$

Das bedeutet, dass auf endlichen Intervallen stetige Funktionen sich bezüglich der Supremumsnorm durch Polynome beliebig gut approximieren lassen.

Beweis: (konstruktiver Beweis mit Hilfe der Bernstein-Polynome)

Das n -te Bernstein-Polynom $b_n(f; t)$ zur Funktion f ist definiert durch: $b_n(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ (3.9.1)

Mit der Substitution $t := \frac{x-a}{b-a}$ kann man sich auf die Behandlung des Intervalls $[0, 1]$ beschränken.

Zu zeigen ist also, dass die Folge $(b_n : n \in \mathbb{N})$ der Bernstein-Polynome im Intervall $[0;1]$ bezüglich der Supremumsnorm gegen f konvergiert.

$$\text{Es gilt: } 1 = [t + (1-t)]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad | \cdot f(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{k=0}^n f(t) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad (3.9.2)$$

$$\Rightarrow f(t) - b_n(t) = \sum_{k=0}^n \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad (3.9.2) - (3.9.1)$$

$$\Rightarrow |f(t) - b_n(t)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad (3.9.3)$$

Wegen der Stetigkeit von f an der Stelle t hat man:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $\left(\frac{k}{n}\right)$ mit $k \in \mathbb{N}; 0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\left(\left| \left(\frac{k}{n}\right) - t \right| < \delta \Rightarrow \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Für jedes $t \in [0;1]$ kann man die Mengen $K' := \{k \mid |t - \frac{k}{n}| < \delta\}$ und $K'' := \{k \mid |t - \frac{k}{n}| \geq \delta\}$ bilden.

Entsprechend kann man die Summe in (3.9.3) in die zwei Teilsommen

$$\sum_{k \in K'} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad \text{und} \quad \sum_{k \in K''} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad \text{zerlegen.}$$

Abschätzung der ersten Teilsomme:

Aus $|t - \frac{k}{n}| < \delta$ folgt wegen der Stetigkeit von f (s.o.): $|f(t) - f(\frac{k}{n})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit:

$$\sum_{k \in K'} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \cdot \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} < \sum_{k \in K'} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \frac{\varepsilon}{2}$$

Abschätzung der zweiten Teilsomme:

$$\text{Mit } M := \sup_{t \in [0;1]} |f(t)| \text{ gilt: } \sum_{k \in K''} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad \left(\text{da } \frac{|t - \frac{k}{n}|^2}{\delta^2} > 1 \right)$$

$$< \sum_{k \in K''} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \frac{|t - \frac{k}{n}|^2}{\delta^2} \leq \sum_{k=0}^n 2M \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \frac{(t - \frac{k}{n})^2}{\delta^2} = \\ = \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} (t - \frac{k}{n})^2$$

Diese Summe besteht wegen $(t - \frac{k}{n})^2 = t^2 - 2t\frac{k}{n} + (\frac{k}{n})^2$ aus drei Teilsommen, die man zu den folgenden Werten berechnen kann:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = t^2 - \frac{1}{n} (t^2 - t) \\ 2) \quad & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} (-2t\frac{k}{n}) = -2t^2 \\ 3) \quad & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} t^2 = t^2 \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $t \in [0;1]$: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} (t - \frac{k}{n})^2 = \frac{t(1-t)}{n} \leq \frac{1}{4n}$, da die Funktion bei $g(t) = t(1-t)$ bei

$$t = \frac{1}{2} \text{ ihr Maximum annimmt, und } \sum_{k \in K''} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{1}{4n}$$

$$\text{Wählen wir } n > \frac{M}{\delta^2 \varepsilon}, \text{ d.h. } \frac{2M}{\delta^2} \frac{1}{4n} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ so gilt } \sum_{k \in K''} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Demnach gilt insgesamt (zusammen mit der ersten Abschätzung) wie gewünscht:

$$\forall t \in [0;1]: |f(t) - b_n(f; t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{q.e.d.}$$

Aufgaben:

- A) Gegeben ist die auf $[0,1]$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^3$.
 Stelle die ersten drei Folgenglieder der Folge der Bernsteinpolynome auf! Vergleiche deren Graphen (z.B. unter Zuhilfenahme eines Computerprogrammes) mit dem Verlauf des Graphen von f !
- B) Gegeben ist die auf $[-\pi, \pi]$ definierte Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Gleiche Aufgabenstellung wie in A)!

3.10. Approximation in normierten Vektorräumen: Der Fundamentalsatz der Approximationstheorie

Quelle zur Vorbereitung: [7], S. 8-16

Die Teile 3.10 und 3.11 führen in allgemeine Gedanken der Approximationstheorie ein.

Approximationsproblem

Es sei V ein normierter Vektorraum, $U \subset V$, $f \in V$.

Definition: Es wird nach der Existenz einer „besten Approximation“ in der Teilmenge U des normierten Vektorraumes V an ein Element $f \in V$ gesucht.

Genauer: Gesucht ist ein Element $f^* \in U$, für das für alle $g \in U$ gilt: $\|f - f^*\| \leq \|f - g\|$

Dieses Element f^* nennt man die *beste Approximation aus U an f* .

Das Approximationsproblem ist lösbar, wenn man an die Teilmenge U von V eine zusätzliche Bedingung stellt.

Satz (Fundamentalsatz der Approximationstheorie):

Es sei $f \in V$, $g_1, \dots, g_n \in V$, $T = \text{span}(g_1, \dots, g_n) \subset V$. Dann existiert ein $f^* \in T$, so daß für alle $g \in T$: $\|f - f^*\| \leq \|f - g\|$

Beweisidee: Zu zeigen ist, dass $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \|f - (\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n)\| \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$ ein Minimum besitzt. Man kann dieses Minimum in einer abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ suchen. Dann nimmt die stetige Funktion F auf M ihr Minimum auch an. (Ausführlich in [7])

Bei ausführlicher Behandlung des Beweises des Fundamentalsatzes der Approximationstheorie ist dieser Teil 3.10. vom Umfang her mit den anderen Teilen vergleichbar.

Aufgabe: Beschaffe Dir das Buch [7] und arbeite den Beweis des Fundamentalsatzes der Approximationstheorie durch!

3.11. Die Eindeutigkeit der besten Approximation

Quelle zur Vorbereitung: [7], S. 8-22

Definition: Eine Norm $\|\cdot\|$ heißt *streng*, wenn gilt: Für je zwei beliebige Funktionen $f, g \in V$; $f, g \neq 0$, muß gelten: (Wenn $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$ erfüllt ist, dann muß es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, so daß: $g = \lambda f$)

Bemerkungen und Aufgaben:

A) Es gilt dann sogar $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Beweise dies!

Lösung/Beweis: $\|f + g\| = \|f + \lambda f\| = \|f\| + \|\lambda f\| = (1 + |\lambda|) \cdot \|f\|$.

Wegen $\|f + \lambda f\| = (1 + |\lambda|) \cdot \|f\|$ ist $|1 + \lambda| = 1 + |\lambda|$. Also $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

B) Umgekehrt gilt: ($g \neq \lambda f$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$) $\Rightarrow \|f + g\| < \|f\| + \|g\|$

C) $C[a,b]$ ist bezüglich der Normen $\|\cdot\|_p$, $1 < p < \infty$, streng normiert. (ohne Beweis)

Für die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ (wobei $\|\cdot\|_1$ die Tschebyschew- und $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm bezeichnen) gilt dies nicht. Gib ein Gegenbeispiel an, das zeigt, daß die Tschebyschew- und die Maximumnorm nicht streng sind!

Satz: Sei V ein streng normierter Vektorraum und $T \subset V$.
Dann ist die beste Approximation $f^* \in T$ an $f \in V$ eindeutig bestimmt.

Beweis:

1. Fall: $f \in T$: $f^* := f$ ist in jedem normierten Vektorraum die eindeutig bestimmte beste Approximation.
(vgl. (D2) (in 3.2)).

2. Fall: $f \notin T$: Man nimmt an, dass f^* und f^{**} jeweils beste Approximationen seien.

Dann ist $\|f - f^*\| = \|f - f^{**}\| = \rho \leq \|f - g\|$ für alle $g \in T$ (ρ wird hier neu definiert)

$1/2 (f^* + f^{**})$ ist dann ebenfalls beste Approximation, denn:

$$\rho \leq \|f - 1/2 (f^* + f^{**})\| = \|1/2 (f - f^*) + 1/2 (f - f^{**})\| \leq 1/2 (\|f - f^*\| + \|f - f^{**}\|) = \rho$$

Daraus folgt auch: $\rho = 1/2 \|(f - f^*) + (f - f^{**})\|$, und damit:

$$\|(f - f^*) + (f - f^{**})\| = \|f - f^*\| + \|f - f^{**}\| \quad (\text{denn } 2\rho = \rho + \rho)$$

und weiter $f - f^* = \lambda (f - f^{**})$, da die Norm streng ist.

Umgeformt hat man $(1 - \lambda) f = f^* - \lambda f^{**}$ und folgert $\lambda = 1$, also $f^* = f^{**}$, weil sonst $f \in T$ sein müsste. q.e.d.

Bemerkung: A) Aus dem Beweis folgt auch: In jedem normierten Vektorraum gibt es genau eine oder unendlich viele beste Approximierende aus $T \subset V$ an $f \in V$, da mit f^* und f^{**} auch $f^* + (1 - \lambda) f^{**}$ für alle $\lambda \in]0,1[$ beste Approximierende sind (der Beweis dazu ist leicht).

B) Die Eigenschaft eines Vektorraumes, streng normiert zu sein, ist wie gesehen hinreichend, aber nicht notwendig für die Eindeutigkeit der besten Approximation, und es gilt der

Satz: Sei V nicht streng normiert. Dann existiert stets ein (linearer) Teilraum $T \subset V$ und ein Element $f \in V$, so dass mehr als eine beste Approximation aus T an f existiert.
(ohne Beweis)

Aufgabe: Gegeben ist der von g mit $g(x)=1$ aufgespannte Untervektorraum $U = \text{span}(\{1\})$ des $\mathbb{R}$ -Vektorraumes $C[0,1]$. Es soll die (nach Bemerkung C) oben) strenge Norm $\|\cdot\|_p$ mit $p = 2$ verwendet werden.
Bestimme die (eindeutig bestimmte) beste Approximation aus U an die Funktion f mit $f(x)=x^2$!

3.12. Normalgleichungen und lineare Regression

Quelle zur Vorbereitung: [7]

Teil 3.12 rundet die Approximationstheorie im Rahmen der Gedanken des Kurses ab und fungiert als Bindeglied zur Regressionsgerade, die in 3.14 aus Sicht der Fehlerrechnung aufgegriffen wird.

Aufbauend auf 3.10. (Approximation in normierten Vektorräumen) kann man mit Hilfe der *Normalgleichungen* gewisse Approximationsaufgaben lösen.

Es sei V ein normierter Vektorraum, dessen Norm sich aus dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ergibt und $T := \text{span}(g_1, \dots, g_n)$ ein von den Basisvektoren $g_1, \dots, g_n$ aufgespannter Untervektorraum von V .

Zu einem $f \in V$ sei $\tilde{f} \in T$ die beste Approximation an f in T . Nach diesem $\tilde{f}$ zu suchen, bedeutet, das Minimum der Funktion $F(\alpha) = \|f - (\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n)\|$ für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ zu suchen. Da $F(\alpha) \geq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n$, kann man genauso gut den Vektor $\tilde{\alpha}$ bestimmen, für den $F^2(\alpha)$ minimal wird. Für $\tilde{\alpha}$ muß gelten:

$$\text{Für alle } k \in \{1, \dots, n\}: \frac{\partial F^2}{\partial \alpha_k}(\tilde{\alpha}) = 0 \quad (3.12.1)$$

Zur Vereinfachung definiert man die Funktion $\varphi(\alpha) := f - \sum_{m=1}^n \alpha_m g_m$

Dann kann man F^2 schreiben als: $F^2(\alpha) = \|\varphi(\alpha)\|^2 = \langle \varphi(\alpha), \varphi(\alpha) \rangle$

Dieser Ausdruck wird nun in den Differentialquotienten $\frac{\partial F^2}{\partial \alpha_k}(\tilde{\alpha}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F^2(\alpha_1, \dots, \alpha_k + h, \dots, \alpha_n) - F^2(\alpha)}{h}$

eingesetzt: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_k + h, \dots, \alpha_n), \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_k + h, \dots, \alpha_n) \rangle - \langle \varphi(\alpha), \varphi(\alpha) \rangle}{h}$

Durch Anwenden des *Mittelwertsatzes* $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x) + h \cdot f'(x))$ und anschließendes Ausmultiplizieren des Skalarprodukts kann der Differentialquotient oben weiter umgeformt werden:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left\langle \varphi(\alpha) + h \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}(\alpha), \varphi(\alpha) + h \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}(\alpha) \right\rangle - \langle \varphi(\alpha), \varphi(\alpha) \rangle}{h} = 2 \left\langle \varphi(\alpha), \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}(\alpha) \right\rangle$$

Aus der Definition von $\varphi(\alpha)$ folgt, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}(\alpha) = -g_k$ ist. (3.12.1) ist also äquivalent zu:

$$\text{Für alle } k \in \{1, \dots, n\}: \langle \varphi(\alpha), g_k \rangle = 0 \Leftrightarrow \text{Für alle } k \in \{1, \dots, n\}: \left\langle f - \sum_{m=1}^n \alpha_m g_m, g_k \right\rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{Für alle } k \in \{1, \dots, n\}: \langle f, g_k \rangle = \left\langle \sum_{m=1}^n \alpha_m g_m, g_k \right\rangle \Leftrightarrow \text{Für alle } k \in \{1, \dots, n\}: \langle f, g_k \rangle = \sum_{m=1}^n \alpha_m \langle g_m, g_k \rangle$$

Der letzte Ausdruck steht für ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen und n Unbekannten (nämlich $\alpha_1, \dots, \alpha_n$) und kann gelöst werden. Diese Gleichungen werden als *Normalgleichungen* bezeichnet.

Beispiel (Methode der kleinsten Quadrate):

Die Normalgleichungen können bei folgendem Problem angewendet werden: Gegeben sind N Wertepaare $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$. Diese sollen mit Hilfe von Funktionen $g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$ angenähert werden, so daß die beste Approximation $\tilde{f} = \tilde{\alpha}_1 g_1 + \dots + \tilde{\alpha}_n g_n \in \text{span}(g_1, \dots, g_n)$ an den Stellen $x_1, \dots, x_N$ den Werten $y_1, \dots, y_N$ möglichst nahe kommt. Bei Verwendung der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$ sucht man also Koeffizienten $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n$, für die gilt:

$$\text{Für alle } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n: \sum_{l=1}^N (y_l - \tilde{f}(x_l))^2 \leq \sum_{l=1}^N \left(y_l - \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x_l) \right)^2$$

Es ergeben sich daraus im $\mathbb{R}^n$ für $y = (y_1, \dots, y_N)$ und $g_k = (g_k(x_1), \dots, g_k(x_N))$, $k \in \{1, \dots, n\}$, die *Normalgleichungen*: Für alle $k \in \{1, \dots, n\}$: $\langle y, g_k \rangle = \sum_{m=1}^n \alpha_m \langle g_m, g_k \rangle$

Beispiel und Aufgabe:

Für $g_1(x) = 1$; $g_2(x) = x$ erhalten wir über die Normalgleichungen die *Regressionsgerade* zu den Wertepaaren (x_i, y_i) , $i \in \{1, \dots, N\}$. Beweise dies durch Nachrechnen und Vergleich mit 3.14 „Die Ausgleichsgerade“!