3.13. Fehlerfortpflanzung in der Experimentalphysik

Quelle zur Vorbereitung: [18], S. 9-14

Genauigkeitsüberlegungen in der Experimentalphysik finden ihren Niederschlag in der Fehlerrechnung. In 3.13 und 3.14 werden einige einschlägige Inhalte besprochen.

Eine sich oft stellende Aufgabe der Experimentalphysik ist es, eine physikalische Größe G, die nicht unmittelbar zugänglich ist, aus anderen messbaren Größen x, y, z,... zu berechnen. Die in $G = f(x, y, z, ...)$ eingesetzten Größenwerte x, y, z,... bestehen dabei aus einer Zahl und einer Einheit und sind Ergebnisse einer Messung.

Messen von Größen

Ziel der Messung einer Größe x ist es, ein Intervall angeben zu können, in dem der wahre Wert x_μ der Meßgröße mit angebbarer Wahrscheinlichkeit liegt. Dabei ist durch eine Optimierung des Meßverfahrens anzustreben, dass die Abweichung möglichst gering wird.
Abweichungen vom wahren Wert heißen (Meß-)*Fehler*. Es sind zwei Arten von Fehlern zu unterscheiden:

- *systematische* Abweichungen, die bei wiederholten Messungen mit gleichen Bedingungen immer wieder gleich auftreten, und z.B. in einer falschen Einschätzung der Meßverhältnisse begründet liegen,
- *zufällige* Abweichungen, in Form einer statistischen Streuung der Meßergebnisse.

Es gibt kein allgemeines Verfahren, um systematische Fehler auszuschließen. Gefragt ist hier die Sorgfalt des Experimentators. Die folgende Theorie geht davon aus, dass keine systematischen Fehler mehr vorliegen.
Trägt man bei einer hohen Anzahl von Messungen die relativen Häufigkeiten der Meßwerte gegen die Meßwerte auf, so kann man auf die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der gemessenen Größe schließen. Ein typischer Fall für eine solche Verteilung ist die *Gauß*- oder *Normalverteilung* mit der Dichtefunktion :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Die Variable σ steht für die *Standardabweichung* (siehe auch 3.18 „Signifikanztests", (3.18.5)) und ist ein Parameter, der die „Breite" der Verteilung angibt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Meßwert im Intervall $[x_\mu - \sigma \; ; \; x_\mu + \sigma]$ liegt, ist 68,3%, für das Intervall $[x_\mu - 3\sigma \; ; \; x_\mu + 3\sigma]$ sogar 99,7% (siehe auch 3.18). Die dreifache Standardabweichung heißt deshalb auch *Maximalfehler*.
Bei einer Messung werden die Ergebnisse zusammen mit der Standardabweichung angegeben, die ein Maß für deren Genauigkeit darstellt (Beispiel.: x = (2,148 ± 0,001) m). Die Standardabweichung σ ist oft auch auf Meßgeräten angegeben.
Bei einer Messreihe für die Größe x, deren Meßwerte normalverteilt sind, verwendet man als Näherungen für den wahren Wert x_μ und für die Standardabweichung σ folgende Terme, die sich für zunehmendes n dem wahren Wert x_μ bzw. der Standardabweichung σ nähern (ohne Beweis):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad s_x = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{1/2}$$

Die durch s_x angenäherte Standardabweichung legt das Intervall fest, in dem $\bar{x}$ mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Die Standardabweichung des Mittelwertes $\bar{x}$ ist kleiner als die Standardabweichung σ_x der einzelnen Meßwerte: $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x/\sqrt{n}$ (ohne Beweis)

Fehlerfortpflanzungsgesetz

Die unmittelbar zugänglichen Größen x, y, z, ... seien mit den Fehlern (Standardabweichungen) $\delta x = \sigma_x$, $\delta y = \sigma_y$, $\delta z = \sigma_z$, ... gemessen worden. Aus diesen Fehlern von x, y, z,... soll nun der Fehler δG der nicht direkt meßbaren Größe G berechnet werden. Dazu gibt es das Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß:

$$\delta G \approx \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right)^2 + ...\right]^{1/2}$$

Beispiel und Aufgabe: Geschwindigkeit $v(s,t) = \frac{s}{t}$. Dabei bezeichnet s den in der Zeit t zurückgelegten Weg, δs den Fehler bei der Ortsmessung und δt den Fehler bei der Zeitmessung.
Leite eine Formel für den Fehler δv der errechneten Geschwindigkeit ab!

Lösung: Der Fehler δv der errechneten Geschwindigkeit beträgt:

$$\delta v \approx \left[\left(\frac{1}{t}\delta s\right)^2 + \left(-\frac{s}{t^2}\delta t\right)^2 \right]^{1/2} \Leftrightarrow \frac{\delta v}{v} \approx \left[\left(\frac{\delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\delta t}{t}\right)^2 \right]^{1/2}$$

Hier muß man also die ins Quadrat genommenen relativen Fehler $(\delta s/s)^2$ und $(\delta t/t)^2$ addieren, um den relativen Fehler $(\delta v/v)^2$ zu erhalten.

Aufgaben: „Eine Meßgenauigkeit von 1/1000 s im Schwimmsport?“

Olympiade München 1972
400-m-Lagen Herren:
1. Larson 4:31,982
2. McKee 4:31,984

Olympiade Los Angeles 1984
100-m-Freistil Damen:
l. Hogshead 55,92
2. Steinseifer 55,92

Die Auszüge aus den beiden Ranglisten zeigen, daß zwischen 1972 und 1984 etwas sehr Bemerkenswertes geschehen ist: Die Mitglieder des Internationalen Schwimmverbandes haben Physik gelernt! Das Reglement wurde nach dem knappen Entscheid von 1972 über 400-m-Lagen der Herren nämlich dahingehend geändert, daß die Zeitmessung nur noch auf 1/100 s genau erfolgt und nicht mehr auf 1/1000 Sekunde.
So wurden 1984, als es in Los Angeles zu der sehr knappen Entscheidung über 100-m-Freistil der Damen kam, richtigerweise zwei Goldmedaillen vergeben.
Warum war der Entscheid von 1972, eine Goldmedaille aufgrund eines Vorsprungs von 2/1000 Sekunden zu vergeben, physikalisch unhaltbar und ungerecht?
Oder anders gefragt: Warum ist im Schwimmsport eine Zeitmessung auf 1/1000 s genau nicht sinnvoll?

Überlege Dir dazu folgende Punkte:
1) Wie genau müßte die *Länge* eines 50-m-Beckens bekannt sein, damit eine Entscheidung wie die von 1972 gerecht wäre? Oder anders gefragt; Wenn zwei Schwimmer exakt gleich schnell sind: Um wie vie! länger müsste die eine Bahn sein, damit der Konkurrent auf der anderen Bahn einen Vorsprung von 1/1000 s erringt?
2) Die *Schallgeschwindigkeit* beträgt 330 m/s. Wie weit dürften zwei Startblöcke höchstens voneinander entfernt sein, damit die Schwimmer das Startsignal bis auf 1/1000 s genau gleichzeitig hören?
(Dieser Tatsache wird bei großen Schwimmmeisterschaften dadurch Rechnung getragen, dass jeder Startblock mit einem Lautsprecher ausgerüstet ist.)
3) Der *Strömungswiderstand* ist (näherungsweise) gegeben durch $F_W = ½\, c_w \rho A v^2$ mit
dem Widerstandsbeiwert c_w (abhängig von der Form des Körpers; Zahl ohne Einheit)
der Wasserdichte ρ,
dem größten der Strömungsrichtung entgegenstehenden Körperquerschnitt A
und der Schwimmgeschwindigkeit v.
Bei 25 °C beträgt die Dichte des Wassers $9{,}97047 \cdot 10^2$ kg/m^3,
bei 26°C liegt sie bei $9{,}96841 \cdot 10^2$ kg/m^3.
Die Wassertemperatur beeinflußt also über die Dichte des Wassers den Widerstand, d.h. daß bei zwei identischen Schwimmern, die die gleiche Kraft aufwenden, derjenige schneller vorwärts kommt, der im wärmeren Wasser schwimmt.
Um wie viel °C dürfte die **Wassertemperatur** im Bassin höchstens differieren, wenn man vom Idealfall zweier identischer Konkurrenten ausgeht (d.h. gleicher Widerstandsbeiwert und Querschnitt und gleiche Kraft F) und die Vergabe einer Medaille aufgrund einer Zeitdifferenz von 0,001s berechtigt sein soll?

3.14. Die Ausgleichsgerade

Quelle zur Vorbereitung: [18], S. 9-29

Es soll hier untersucht werden, wie man den funktionalen Zusammenhang zwischen einer variablen, als fehlerfrei angenommenen Größe x und der von ihr abhängigen, aufgrund des Messens fehlerbehafteten Größe y aus n gemessenen Wertepaaren (x_i,y_i) optimal bestimmt bzw. bestätigt.
Liegt ein linearer Zusammenhang vor, kann dieser durch eine Geradengleichung $y = a + b \cdot x$ (3.14.1)
beschrieben werden, deren Koeffizienten a und b man aus den Meßwerten mit Hilfe der Methode der kleinsten Abweichungsquadrate von Gauß berechnet. (Bei nichtlinearen Zusammenhängen kann man den Zusammenhang oft durch geeignete Transformation der Werte x_i bzw. y_i linearisieren.)

Zunächst betrachtet man die Summe Q der Abweichungsquadrate aller gemessenen Werte y_i von den jeweiligen Werten $\overline{y}_i := ax_i + b$, die sich nach 3.14.1 ergeben würden:

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot x_i - b)^2 \qquad (3.14.2)$$

Um verschiedene Varianzen (siehe (3.18.4)) der y_i-Werte zu berücksichtigen, fügt man manchmal noch Gewichte g_i für die einzelnen Meßwerte hinzu:

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} g_i (y_i - a \cdot x_i - b)^2 \qquad (3.14.3)$$

Für die beste Ausgleichsgerade wird Q(a,b) minimal. Ähnlich wie in 3.12 werden zur Berechnung dieses Minimums die ersten partiellen Ableitungen von Q nach a bzw. b jeweils gleich 0 gesetzt (bei der Extremstelle muss es sich immer um ein Minimum handeln, da es für $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ keinen größten Wert für Q gibt):

$$\frac{\partial Q}{\partial a}(a,b) = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot g_i \cdot (y_i - a \cdot x_i - b) = 0 \qquad (3.14.4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b}(a,b) = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot (y_i - a \cdot x_i - b) = 0 \qquad (3.14.5)$$

Löst man die Gleichungen (3.14.4) und (3.14.5) nach a bzw. b auf und erhält man durch Einsetzen Werte für die gesuchten Koeffizienten a und b:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i \cdot \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i \cdot \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} g_i \cdot x_i)^2} ; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i g_i y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i g_i - \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 g_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i g_i}{(\sum_{i=1}^{n} x_i g_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 g_i \cdot \sum_{i=1}^{n} g_i} \qquad (3.14.6)$$

Der Fehler der Steigung a der Ausgleichsgeraden beträgt (ohne Beweis):

$$\delta a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} g_i (y_i - ax_i - b)^2}{(n-2) \cdot \sum_{i=1}^{n} g_i (x_i - \sum_{i=1}^{n} g_i x_i (\sum_{i=1}^{n} g_i)^{-1})^2}} \qquad (3.14.7)$$

Ist dieser Fehler groß, so muß man überlegen, ob wirklich ein linearer Zusammenhang vorliegt.

Zur Überprüfung des linearen Zusammenhangs trägt man an die Meßwerte Fehlerbalken an. Bei einem linearen Zusammenhang zwischen den aufgetragenen Größen dürfen in diesem graphischen Verfahren maximal $\frac{1}{3}$ der Fehlerbalken außerhalb der Geraden liegen.
Nimmt man an, daß auch die x-Werte fehlerbehaftet sind, so können statt der vertikalen Abstände die Abstände orthogonal zur Geraden minimiert werden. Dies wird in der Praxis jedoch selten benutzt.
Stattdessen verwendet man in diesem Fall oft ein graphisches Verfahren, bei dem sowohl die Fehlerbalken in x-Richtung als auch die in y-Richtung eingetragen werden. Es entstehen Fehlerkreuze bzw. Fehlerellipsen, durch die eine optimale Gerade gelegt wird. Zur Abschätzung des Fehlers der Steigung trägt man in das gleiche Diagramm Geraden mit maximaler und minimaler Steigung ein, die ebenfalls noch mindestens durch ein Drittel der Fehlerellipsen der aufgetragenen Wertepaare verlaufen.

Aufgaben:
A) Leite den Fehler der Steigung a der Ausgleichsgeraden (siehe oben) her!
B) Werte eine tatsächliche Meßreihe aus einem Physik-Experiment so aus, daß Du die oben beschriebenen Verfahren anwendest (Fehlerrechnung)!

3.15. Chaos und Genauigkeit: Kausalität, Determinismus, Phasenraum, Sensitivität

Quelle zur Vorbereitung: [25], S. 203-214

Besonders interessant für das Kursthema ist der Fall sensitiver Anfangsbedingungen: Trotz höchster Genauigkeit scheint keine annähernd genaue Vorhersage des Langzeitverhaltens eines Systems möglich.

Zur Einführung in die Theorie des Deterministischen Chaos sei zunächst ein deterministischer Standpunkt von P.S. LAPLACE (1812, zitiert nach [24]) wiedergegeben:
„Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung seines früheren Zustands und andererseits als Ursache des Darauffolgenden betrachten. Ein ‚Geist', der für einen gegebenen Augenblick alle Kräfte kennen würde, von denen die Natur belebt ist, sowie die gegenseitige Lage der Wesen, aus denen sie besteht, und der überdies umfassend genug wäre, um diese Gegebenheiten zu analysieren, könnte mit derselben Formel die Bewegung der größten Weltkörper und des kleinsten Atoms ausdrücken. Nichts wäre für ihn ungewiss, Zukunft und Vergangenheit lägen offen vor seinen Augen."
LAPLACE spricht hier von einem Ursache-Wirkungs-Verhältnis, das von J.C. MAXWELL (1873, zitiert nach [4]) präzisiert wird:
„Es ist eine metaphysische Doktrin, dass gleiche Ursachen gleiche Wirkungen nach sich zögen. Niemand kann sie bestreiten. Ihr Nutzen aber ist gering in einer Welt wie dieser, in der gleiche Ursachen niemals wieder eintreten und nichts zum zweiten Mal geschieht."
Dieses Ursache-Wirkungs-Verhältnis („Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen.") bezeichnet man als Prinzip der *schwachen Kausalität*. Dieser Satz soll als gültig angenommen werden.
Der naheliegende Satz „Ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen." formuliert das Prinzip der *starken Kausalität*, die jedoch in unserer Welt nicht immer erfüllt ist. MAXWELL äußert sich 1873 (zitiert nach [19]) über die mögliche Verletzung des starken Kausalitätsprinzips:
„Es ist ganz offensichtlich, dass die Existenz instabiler Bedingungen die Vorhersage künftiger Ereignisse unmöglich macht, wenn unser Wissen über den gegenwärtigen Zustand nur ein angenähertes und kein genaues ist..."
Offenbar bezieht sich MAXWELL darauf, dass winzige Unterschiede in den Anfangsbedingungen eines betrachteten Systems (d.h. zueinander ähnliche Ursachen) nach einer Zeit zu gravierenden Unterschieden im Verhalten dieses Systems führen (verschiedene Wirkungen). Diesen Sachverhalt nennt man *sensitive Abhängigkeit des Systems von den Anfangsbedingungen*. Vorhersagen über das Langzeitverhalten des Systems werden unmöglich, der Zustand des Systems nach einer bestimmten Zeit erscheint zufällig.
Eine solche Zufälligkeit kann man beispielsweise an einem Magnetpendel (Fadenpendel mit einem aufgehängten Magneten über einer Anordnung von fest fixierten Magneten) beobachten. Trotz fast identischer Startpositionen des Pendels (Anfangsbedingungen) schwingt sich das System je nach Anordnung der Magneten etwa bei verschiedenen Punktattraktoren (s.u.) , also in der Nähe verschiedener Magneten, ein. Ein anderes Beispiel liefert das Wetter: Ungenauigkeiten in der Erfassung der Anfangsbedingungen (Temperatur, Druck, etc.) an allen Stellen der Erde führen zu Fehlern in großem Maßstab, wodurch tragfähige Langzeitvorhersagen oft schlicht unmöglich sind.
Ein nicht mehr vorhersagbares Verhalten wie oben beschrieben nennt man *chaotisches Verhalten*.
Es sollte noch einmal betont werden, dass trotz des Umstandes, dass Vorhersagen über das Langzeitverhalten chaotischer Systeme unmöglich sind, die physikalischen Ereignisse in der Zukunft prinzipiell von denen in der Vergangenheit abhängig bleiben. Der Determinismus im Sinne der schwachen Kausalität gilt weiterhin. Man spricht daher von *deterministischem Chaos*.
Anmerkung: Die Quantenmechanik weiß von Systemen zu berichten, in denen auch das Prinzip der schwachen Kausalität verletzt ist.

Potential, Phasenraum und Attraktoren

Das Potential stellt die potentielle Energie eines Systems (z.B. eines Hookeschen Federpendels) in Abhängigkeit von einer oder mehreren Variablen (z.B. der Auslenkung) dar. Das Potential für das Hookesche Federpendel kann beispielsweise durch eine Parabel dargestellt werden, deren Scheitel an der Stelle der Gleichgewichtslage liegt (s. Abb. 3.15.1).
Das Verhalten eines Systems abhängig von der Zeit kann Phasenraum dargestellt werden. Betrachtet man beispielsweise Systeme mit einem Freiheitsgrad (z.B. das Hookesche Federpendel), so entsteht ein Phasenraumdiagramm im $\mathbb{R}^2$, indem man die Geschwindigkeit v des Massepunktes gegen seinen Ort x anträgt. Für das ungedämpfte Hookesche Federpendel (harmonische Schwingung) erhält man eine elliptische Bahn im Phasenraumdiagramm, die immer wieder durchlaufen wird (Abb. 3.15.2). Ist das Federpendel gedämpft, so ergibt sich eine Bahn wie in Abb. 3.15.3, die auf den Ursprung (entspricht dem in der Gleichgewichtslage ruhenden Massepunkt) zuläuft.
Ein Punkt im Phasenraum, in den eine gewisse Anzahl von Bahnen münden, heißt *Punktattraktor*.
Eine weitere Möglichkeit für einen Attraktor ist der sogenannte *Grenzzyklus*, eine stabile, immer wieder durchlaufene Bahn, auf die eine gewisse Anzahl von Bahnen zulaufen. Beispiel: Bei einer erzwungenen gedämpften harmonischen Schwingung münden nach dem Einschwingvorgang die Bahnen in eine bestimmte stabile elliptische Bahn ein (Abb. 3.15.4).
Über sogenannte *seltsame Attraktoren* kann man in [22] nachlesen.

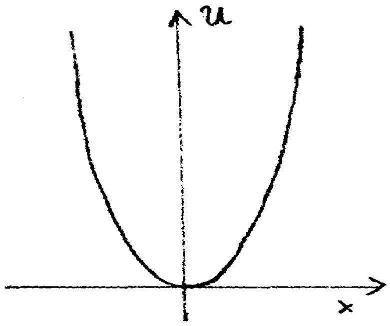

Abb. 3.15.1: Potential eines Hookeschen Federpendels

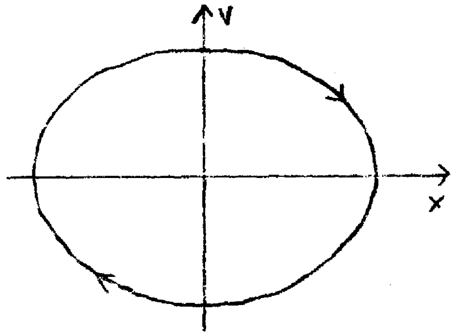

Abb. 3.15.2: Phasenraumdiagramm für eine harmonische Schwingung

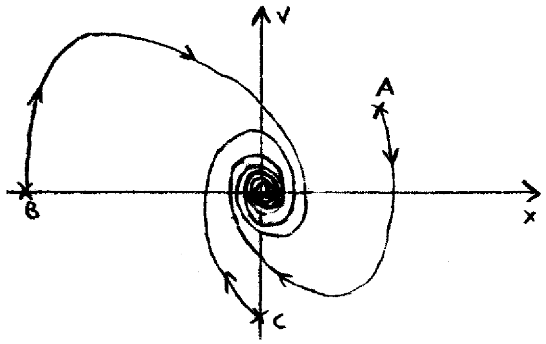

Abb. 3.15.3: Phasenraumdiagramm für eine gedämpfte harmonische Schwingung (Punktattraktor)

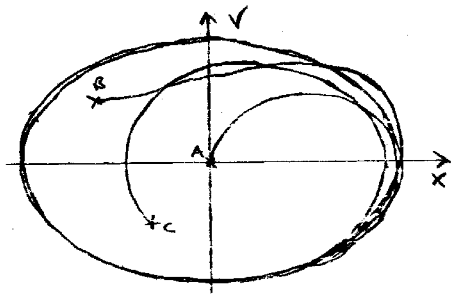

Abb. 3.15.4: Phasenraumdiagramm für eine erzwungene gedämpfte harmonische Schwingung (Grenzzyklus)

3.16. Beispiele für chaotisches Verhalten im physikalischen Experiment (z.B. das Pohlsche Rad mit Unwucht)

Quelle zur Vorbereitung: [25], S. 203-214, [17], S. 337-343, [16], S. 9-22

Das Pohlsche Rad

Das *Pohlsche Rad* ist ein Drehpendel, bei dem eine ring- oder scheibenförmige (Metall-)Platte von einer Feder in eine Ruhelage zurückgetrieben wird, um die die Platte Drehschwingungen ausführen kann. Die Auslenkung des Rades aus seiner Ruhelage bildet den einen Freiheitsgrad des Systems. Da das rückstellende Drehmoment direkt proportional zur Auslenkung ist und das Trägheitsmoment des Rades die Rolle der Masse m beim Hookeschen Federpendel spielt, ist das Pohlsche Rad zunächst ein Beispiel für einen harmonischen Oszillator. Die Schwingungsdauer hängt nicht von der Amplitude ab. Die Frequenz, mit der das einmal ausgelenkte Rad schwingt, ist die *Eigenfrequenz*.
Regt man die Aufhängung der rückstellenden Feder mittels eines Exzenters zu Schwingungen an, so erhält man eine erzwungene harmonische Drehschwingung. Eine Dämpfung lässt sich mit einer Wirbelstrombremse erzielen. Die Stärke der Dämpfung ist über die Stromstärke des angebrachten Elektromagneten regelbar und bildet den variierten Kontrollparameter k.

Der Weg ins Chaos: näherungsweise harmonische Schwingungen, Bifurkationen, chaotisches Verhalten

Beim *Pohlschen Rad mit Unwucht* hat man an das Rad in Ruhelage exzentrisch und oberhalb des Drehpunkts eine zusätzliche Masse angebracht. Dadurch verändert sich das Potential (vgl. Abb. 3.16.1): es entstehen zwei stabile Ruhelagen und eine instabile Ruhelage.
Startet man das System aus einer der stabilen Ruhelagen heraus mit großer Dämpfung, so verlässt das System den Bereich, in dem der Potentialtopf einer Parabel ähnelt, nicht. Das Drehpendel daher führt um die betrachtete stabile Ruhelage näherungsweise eine harmonische Schwingung aus (die Erregerfrequenz entspreche der Eigenfrequenz). Im Zeit-Auslenkungsdiagramm ergibt sich ein sinusartiger Verlauf (mit konstanter Amplitude). Im Phasenraumdiagramm durchläuft das System eine elliptische Bahn.

Verringern wir die Dämpfung etwas, so vergrößern sich die Auslenkungen des Pohlschen Rades mit Unwucht. Das System verlässt den parabelähnlichen, harmonischen Potentialbereich und schwingt auf der einen Seite den „flacher werdenden Potentialhang“ hinauf, was zu einer „verspäteten Rückkunft“ des System in der Ruhelage führt (vergrößerte Frequenz). Das System wird daher nicht optimal angeregt und erreicht auf der anderen Potentialseite eine geringere Auslenkung. Dies führt jedoch dazu, dass das System wieder im harmonischen Bereich schwingt, die Anregung ist wieder optimal, weshalb die Amplitude zunimmt und der nichtharmonische Potentialbereich wieder erreicht wird. Hier schließt sich der Kreislauf.
Im Zeit-Auslenkungsdiagramm ergibt sich zunächst ein Bild einer Schwingung mit zwei verschieden großen, abwechselnd erreichten Auslenkungswerten. Im Phasenraumdiagramm durchläuft das System eine aus zwei Schleifen bestehende Bahn (vgl. Abb. 3.16.2 und 3.16.3). Den Eintritt dieses Verhaltens nennt man *erste Bifurkation*.
Verringert man den Kontrollparameter k der Dämpfung weiter, so können weitere Bifurkationen höherer Ordnung beobachtet werden. Die Bahn im Phasenraum wird erst nach mehreren Umläufen wiederholt durchlaufen.
Bereits nach wenigen Bifurkationen kann das System beginnen, sich chaotisch zu verhalten. Beispielsweise kann es von der Schwingung um eine der Ruhelagen in eine Bewegung um die andere Ruhelage herum „überspringen“. Im Phasenraumdiagramm ergibt sich keine geschlossene Bahn mehr. Im Zeit-Auslenkungsdiagramm kann kaum eine Struktur erkannt werden (vgl. Abb. 3.16.4 und 3.16.5).

Fenster der Ordnung

Verringert man die Dämpfung noch weiter, so können sich bei gewissen Werten von k wieder periodische Schwingvorgänge einstellen. Das Auftreten eines solchen Verhaltens heißt *Fenster im Chaos*. Ist beispielsweise die Amplitude sehr groß, so kann das System relativ „ungestört“ über die beiden Potentialtöpfe „hinwegschwingen“

Feigenbaumdiagramm

Die Bifurkationsschritte des Pohlschen Rades können im sogenannten Feigenbaumdiagramm (vgl. [25]) dargestellt werden, indem man die jeweils auftretenden Amplituden gegen den Kontrollparameter (d.h. die Dämpfung) aufträgt. Im Feigenbaumdiagramm sieht man gut, wie sich die Amplitudenwerte ab einem bestimmten Wert von k in zwei „Äste“ teilen.

Simulation eines Rotationspendels auf dem Computer

Mit den von R. WORG erstellten Simulationsprogrammen (dazu z.B. [16]) kann man unter anderem die einzelnen Schritte auf dem Weg ins Chaos sehr schön beobachten. Der Kontrollparameter der Dämpfung kann hier sehr genau gesteuert werden, was das Aufsuchen von Bifurkationen höherer Ordnung und von Fenstern im Chaos ermöglicht. Die parallele Darstellung von Phasenraum und Zeit-Auslenkungsdiagramm ist sehr übersichtlich.

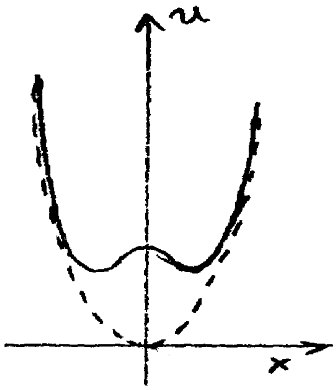

Abb. 3.16.1: Potential des Pohlschen Rades mit Unwucht; gestrichelter Graph: Potentialverlauf ohne Unwucht

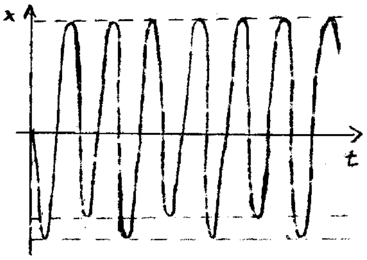

Abb. 3.16.2: Zeit-Auslenkungsdiagramm nach der ersten Bifurkation

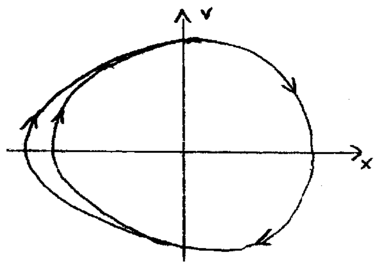

Abb. 3.16.3: Phasenraumdiagramm nach der ersten Bifurkation

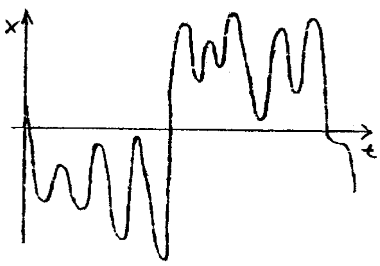

Abb. 3.16.4: Zeit-Auslenkungsdiagramm für chaotisches Verhalten

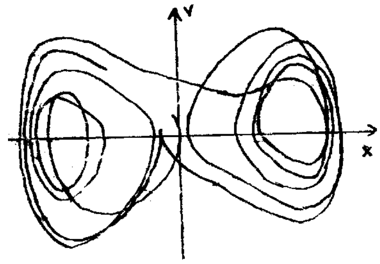

Abb. 3.16.5: Chaotisches Verhalten, Darstellung im Phasenraumdiagramm