3.17. Genauigkeit mathematischer Begründungen: Archimedes und die Berechnung des Kugelvolumens

Quelle zur Vorbereitung: [3], S. 25-36

Um nach den vorangegangenen Überlegungen auch die Genauigkeit mathematischer Begründungen zu untersuchen, wird im Folgenden eine heuristische, beweisähnliche Überlegung von Archimedes vorgestellt, die von Archimedes auch nicht als vollgültiger mathematischer Beweis gesehen wurde, obwohl die Argumentation sehr überzeugend erscheint. Der zu beweisende Satz lautet:

Satz:
Das Volumen einer Kugel mit dem Radius r ist gleich dem vierfachen Volumen eines Kegels mit einem Kreis mit Radius r als Grundfläche und mit der Höhe r .

Für seine heuristische Überlegung verwendet Archimedes ein Verfahren, bei dem die Kugel als unendliche Summe von unendlich dünnen Kreisscheiben aufgefasst wird.

Archimedes verwendet die in Abb. 3.17.1 wiedergegebene Figur. Diese entsteht dadurch, daß über dem Kugeldurchmesser [AB] , auf dem der Kugeldurchmesser [CD] senkrecht steht, Quadrate errichtet werden, die das Rechteck FGHJ bilden und als Schnittfigur eines geraden Kreiszylinders mit der Achse AB und dem Grundkreisradius $\overline{AF} = \overline{AB}$ interpretiert werden. Das Dreieck BCD ist die Schnittfigur eines geraden Kreiskegels, der gerade die Eigenschaften des im obigen Satz beschriebenen Kegels hat.
Durch $N \in [AB]$ ist die Parallele ST zu GH gegeben, die Schnittpunkte mit den Geraden BC und BD sowie mit der Kreislinie heißen O,P bzw. Q, R. Durch Verdoppelung der Strecke [AB] entsteht der Punkt E.

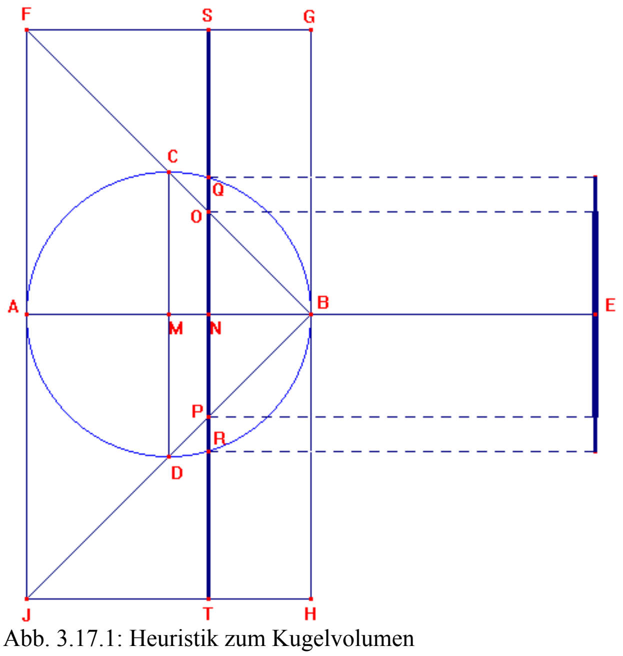

Abb. 3.17.1: Heuristik zum Kugelvolumen

Wenn man den Flächeninhalt des Kreises mit dem Radius r mit K(r) bezeichnet, den Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge a als Q (a) und den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen a und b als R (a, b) notiert, so erhält man aus Abb. 3.17.1 die Beziehungen:

$$Q(\overline{ON}) + Q(\overline{NQ}) = Q(\overline{BN}) + Q(\overline{NQ}) = Q(\overline{BQ}) = R(\overline{BN}, \overline{AB}) = R(\overline{ON}, \overline{SN}) \tag{3.17.1}$$

Dabei gilt die erste Gleichheit, weil die Strecken [ON] und [BN] offenbar gleich lang sind, die zweite Gleichheit aufgrund des Satzes von Pythagoras, die dritte wegen des Kathetensatzes.

Mit (3.17.1) ergebt sich für das Verhältnis: $$\frac{Q(\overline{ON}) + Q(\overline{NQ})}{Q(\overline{SN})} = \frac{R(\overline{ON}, \overline{SN})}{Q(\overline{SN})} = \frac{\overline{ON}}{\overline{SN}} \tag{3.17.2}$$

Mithin erhält man durch Erweitern mit π: $$\frac{K(\overline{ON}) + K(\overline{NQ})}{K(\overline{SN})} = \frac{\overline{ON}}{\overline{SN}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BE}}$$

$$\Rightarrow \overline{BE} \cdot \left(K(\overline{ON}) + K(\overline{NQ}) \right) = \overline{BN} \cdot K(\overline{SN}) \tag{3.17.3}$$

(3.17.3) kann man als eine Art Hebelgesetz interpretieren, wenn man sich den masselosen Balken [AE] in B aufgehängt denkt, an dem als Massen die Fläche K ($\overline{SN}$) in N und die beiden Kreisflächen K ($\overline{ON}$) und K ($\overline{NQ}$) jeweils in E angebracht sind.

Führt man diese Verlagerung des Kegels- und Kugelschnittkreises für alle Schnittgeraden ST zwischen A und B durch, so erhält man nach den obigen Überlegungen ein Gleichgewicht zwischen allen in E aufgehängten Schnittkreisen des Kegels mit dem Schnittdreieck BFJ und allen Schnittkreisen der Kugel einerseits und sämtlichen Schnittkreisen des Zylinders, dessen Schwerpunkt M ist, andererseits. Nach diesem Hebelgesetz gilt also für die Volumina:

$$V_{\text{Kegel (BFJ)}} + V_{\text{Kugel}} = \tfrac{1}{2} V_{\text{Zylinder}} \qquad (3.17.4)$$

Ferner weiß man: $V_{\text{Zylinder}} = 3\, V_{\text{Kegel (BFJ)}}$ und: $V_{\text{Kegel (BCD)}} = \frac{1}{8}\, V_{\text{Kegel (BFJ)}}$ (3.17.5)

(z.B. wegen zentrischer Streckung von Kegel BCD an B mit Streckfaktor 2; das Volumen wird verachtfacht)

Aus (3.17.4), und (3.17.5) folgert man $V_{\text{Kugel}} = 4\ V_{\text{Kegel (BCD)}}$, womit dieser heuristische Gedankengang sein Ziel erreicht hat.

Die vorgestellte heuristische Methode kann nicht als mathematisch korrekter Beweis gelten. Im folgenden Beispiel soll illustriert werden, dass ein analoger Gedankengang zu einer offensichtlich falschen Aussage führt:

Im Dreieck ABC sei die Seite [AC] länger als [BC]. [CD] bezeichne die Höhe von C auf die Seite [AB], die das Dreieck in zwei nicht gleichgroße, rechtwinklige Teildreiecke ADC und DBC unterteilt. Zieht man nun eine beliebige Parallele FG zu AB, die das Dreieck schneidet, so gibt es stets Lote [FH] und [GJ], die gleich lang sind. Denkt man sich die gesamte Fläche eines Teildreieckes aus unendlich vielen Loten zusammengesetzt, die jeweils ein gleich langes Lot im anderen Teildreieck besitzen, so müßte man analog zur heuristischen Methode des Archimedes folgern, dass das Dreieck ADC den gleichen Flächeninhalt hat wie das Dreieck DBC. Dies ist aber offensichtlich falsch.

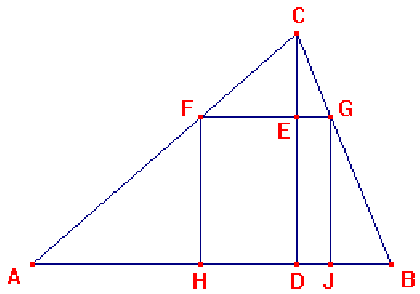

Abb. 3.17.2: „Gegenbeispiel“ zum begründenden Wert der Heuristik zum Kugelvolumen

Man erkennt, dass andere, strengere Beweismethoden verwendet werden müssen. Archimedes konnte nicht auf die Integralrechnung zurückgreifen und führte deshalb mit anderen Mitteln einen weniger anschaulichen, aber mathematisch korrekten Beweis.

3.18. Ein Beispiel für die Gewinnung „sicherer“ statistischer Aussagen: Signifikanztests

Quelle zur Vorbereitung: [1], S. 345 ff, [5], S. 241 ff

Jemand stellt beim Spazierengehen im Wald die Vermutung auf, dass mehr Bäume krank sind als früher. Um diese Vermutung zu überprüfen, nimmt er sich 50 zufällig ausgewählte Bäume vor und stellt fest, wie viele davon krank sind. Um eine Entscheidung zu treffen, müsste er wissen, wie groß der Anteil an kranken Bäumen „früher“ war.

Wie auch immer diese Entscheidung ausfällt, ist sie mit einer Unsicherheit behaftet. Man könnte zufällig beispielsweise nur gesunde oder auch vorwiegend kranke Bäume in seine Stichprobe einbezogen haben und deshalb eine nicht zutreffende Folgerung gezogen haben.

Um größtmögliche Sicherheit statistischer Aussagen anzustreben, d.h. zumindest die Unsicherheit abschätzen zu können, und möglichst genaue Angaben über eine bestimmte Variable (wie hier den Anteil der kranken Bäume) machen zu können, verwendet man die Testtheorie. Als Beispiel sollen hier Signifikanztests vorgeführt werden.

Für Signifikanzteste verwendet man folgendes Modell:

Die *Anzahl der* k*-elementigen Teilmengen einer Menge von* n *Elementen* („k *aus* n“) bezeichnet man mit $\binom{n}{k}$.

Es gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ (mit $n! = \prod_{i=1}^{n} i$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0!=1$) (ohne Beweis) (3.18.1)

Man betrachtet nun einzelne Zufallsexperimente, bei denen es nur auf die Ereignisse E: „Treffer“ oder $\overline{E}$: „nicht Treffer“ ankommt. Die Wahrscheinlichkeit für E sei p, die für $\overline{E}$ ist dann q:=1-p. Eine Serie n solcher Zufallsexperimente, bei der die einzelnen Versuche voneinander unabhängig sind (d.h. jede Wiederholung des Zufallsexperiments findet unter den gleichen Voraussetzungen statt) heißt *Bernoulli-Kette*. Die Variable X (*Zufallsvariable*) bezeichnet die Anzahl der „Treffer“, d.h. des Eintretens des Ereignisses E in der Serie der n Zufallsexperimente.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Bernoulli-Kette genau k-mal das Ereignis E eintritt, ist durch die sogenannte *Binomialverteilung* gegeben:

$B(n; p; k) := \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ (für $k \in \{0, 1, ..., n\}$) (3.18.2)

Beispiel: Abbildung 3.18.1 zeigt ein Balkendiagramm für die Binomialverteilung zu n=10 und p=0,2.

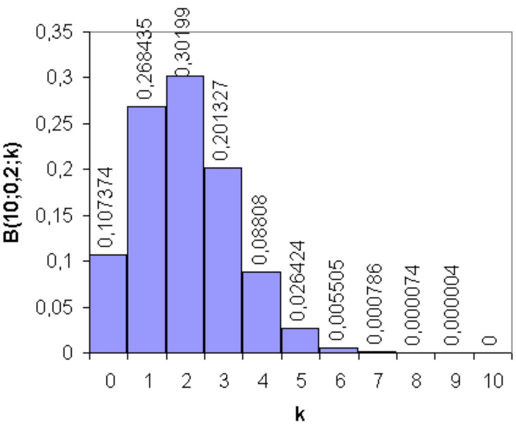

Abbildung 3.18.1: Balkendiagramm für die Binomialverteilung zu n=10 und p=0,2

Den *Erwartungswert* μ für eine Bernoulli-Kette definiert man durch $\mu := \sum_{i=1}^{n} k \cdot B(n,p,k) = n \cdot p$ (3.18.3)

(ohne Beweis für das zweite Gleichheitszeichen)

Die *Varianz* V(X) für eine Bernoulli-Kette definiert man durch $V(X) := \sum_{k=0}^{n} (k-\mu)^2 \cdot B(n,p,k) = n \cdot p \cdot q$ (3.18.4)

(ohne Beweis für das zweite Gleichheitszeichen)

Die *Standardabweichung* σ (*Streuung* um den Erwartungswert) definiert man durch $\sigma(X) := \sqrt{V(X)}$ (3.18.5)

Mittels dieser Begriffe kann man nun Signifikanztests formulieren:
Ausgangspunkt ist eine Aussage über die zu betrachtende Variable, die sogenannte *Nullhypothese* H_0 . Zu dieser stellt man die Verneinung auf (Gegenhypothese H_1). Die Gegenhypothese ist meist die Vermutung, zu deren Gunsten die Nullhypothese mit großer Sicherheit abgelehnt werden soll.
Die Zufallsvariable X, die die Anzahl der „Treffer“ für die Bernoulli-Kette der Länge n angibt, fungiert als *Testgröße.*
Man legt nun das sogenannte *Signifikanzniveau* α des Test fest, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 zu Unrecht abgelehnt wird (Fehler 1. Art)

Man konstruiert einen möglichst großen *Ablehnungsbereich* $\overline{A}$ für H_0 so, dass $P_{H_0}(X \in \overline{A}) \leq \alpha$.

Falls $\overline{A}$ aus zwei Teilintervallen A_1 und A_2 besteht, so legt man A_1 und A_2 so fest, dass $P(X \in A_1) \leq ½ \alpha$ und $P(X \in A_2) \leq ½ \alpha$.
Nun bildet man die Stichprobe und wertet sie aus, d.h. man bestimmt den Wert von X.
Schließlich entscheidet man sich mit folgender *Entscheidungsregel*: Ist $X \in \overline{A}$, so wird H_0 zu Gunsten von H_1 abgelehnt. Ist $X \notin \overline{A}$, so kann H_0 mit diesem Test nicht abgelehnt werden.
Mit einem Signifikanztest können also Hypothesen nur verworfen, nicht aber beweisen werden.

Lehnt man H_0 ab, so tut man dies mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \alpha$.
Oft verwendet man als Signifikanzniveau α einen der Werte 0,32; 0,045 oder 0,003, weil dies die Irrtumswahrscheinlichkeiten (= Signifikanzniveaus) für die 1σ-Umgebung, die 2σ- bzw. die 3σ - Umgebung um den Erwartungswert μ sind. Der Ablehnungsbereich $\overline{A}$ ist dann so zu wählen, dass die jeweilige Umgebung $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$, $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ bzw. $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ vollständig außerhalb von $\overline{A}$ liegt.

Wie aus der Tabelle unten hervorgeht, gibt es auch einen Fehler 2. Art, dessen Auftretenswahrscheinlichkeit man minimieren möchte. Ein gleichzeitiges Minimieren von α und β kann man nur über eine Vergrößerung der *Stichprobenlänge* n erreichen.

H_0 ist	Entscheidung	Entscheidung ist	Fehler / Risiko	Jeweilige Wahrscheinlichkeit
wahr	Ablehnung von H_0	*nicht richtig*	*1. Art*	α
	Nicht-Ablehnung von H_0	richtig	-	$1 - \alpha$
falsch	Ablehnung von H_0	richtig	-	
	Nicht-Ablehnung von H_0	*nicht richtig*	*2. Art*	β

Aufgaben
In einem Wald stehen gesunde und kranke Bäume. Die Waldschadensstatistik weist für die Region 20% der Bäume als krank aus. Ein Förster will feststellen, ob der Anteil an kranken Bäumen in einem bestimmten Waldstück (z.B. an der Autobahn) höher ist. Er wählt dafür zufällig 50 Bäume aus und bestimmt, ob sie krank sind.

a) Vorausgesetzt, es sind in dem Waldstück tatsächlich 45% der Bäume krank. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Förster unter den 50 geprüften Bäumen genau 30 (10, 23, 45) kranke Bäume findet?
b)Berechne den Erwartungswert und die Varianz für die Anzahl kranker Bäume unter den 50 Getesteten!
c) (mit Stochastischem Tabellenwerk) Überprüfe, ob er mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 10%, d.h. mit einer Sicherheit von 90% die (Null-)Hypothese „20% der Bäume sind krank" ablehnen kann, wenn er unter den 50 Bäumen 20 kranke findet! Bestimme den entsprechenden Ablehnungsbereich!

Viele weitere Aufgaben zu diesem Thema finden sich in Schulbüchern, z.B. auch in [1], [5].

4. Vorschläge zur thematischen Variation und Methodik im Rahmen eines Pluskurses

Wegen des etwas geringeren Zeitrahmens des Pluskurses, der entfallenden Vorbereitungsphase, der sicherlich oft notwendigen Wiederholungen der Inhalte der in der vorangegangenen Woche betrachteten Inhalte, sowie anderer Rahmenbedingungen ist es wahrscheinlich nicht möglich, das Vortragsprogramm der Schülerakademie identisch zu übernehmen. Es ist gegebenenfalls ratsam, ein reduziertes mathematisches Programm auf wissenschaftlichem Niveau zusammenzustellen, das nach einer Vorlauf- und Einführungsphase von Schülern in zu Hause vorbereiteten Vorträgen vorgestellt und in Übungen, vergleichbar der Schülerakademie, vertieft wird.
Die Gedanken des Kurses der Schülerakademie zu Vektorräumen, Metriken und Normen sowie darauf aufbauend zu Folgen und d-Konvergenz, ergänzt durch die Behandlung der axiomatischen Grundlegung der reellen Zahlen, können einen geeigneten Rahmen für ein solches reduziertes Programm bilden. Dieses Programm kann dann im gewünschten Umfang thematisch verbreitert bzw. vertieft werden.
Falls die Methode der kleinsten Quadrate und die lineare Regression im Bereich der Numerik Ziel der Vortragsarbeit sein soll, so können andere, vereinfachte Zugänge (ohne die Theorie metrischer Räume) gewählt werden, um so einen kleineren Umfang der Vortragsarbeit zu erreichen.

Im Programm des Kurses der Schülerakademie können die Vortragsthemen der Vorträge 9, 17 und 18 entfallen. Die Inhalte der Vorträge 17 und 18 können stattdessen in die Themenstudienarbeit einbezogen werden.
Eine dritte mögliche Schwerpunktwahl besteht darin, das Nähern stetiger Funktionen zu thematisieren und Vortrag 9 „Der Approximationssatz von Weierstraß“ um die Taylor-Entwicklung und ggf. weitere Inhalte zu erweitern.
Auch andere Themenkomplexe eignen sich in ähnlicher Weise für ein reduziertes Vortragsprogramm.
Eine fokussierte, genaue Betrachtung eines kleineren Teilbereiches einer mathematischen Theorie erfüllt die Funktion des idealtypischen Beispiels für Genauigkeit im wissenschaftlichen Vorgehen der Mathematik sicherlich genauso gut wie eine große Fülle theoretisch aufwändiger mathematischer Sachverhalte.
Die Gedanken zu Fehlerrechnung und deterministischem Chaos im Bereich der Physik sind vom Aufwand her vertretbar, haben hohen Erkenntniswert und wirken motivierend. Zusätzliche Experimente, Praxisbeispiele und/oder Simulationen am Computer können ein Betätigungsfeld für Gruppen- und Projektarbeit sein und vielfältige Lernerlebnisse vermitteln.

Zur Abwechslung und Demonstration der Anwendbarkeit der mathematischen Inhalte könnten in Abständen zusätzlich Übungen im Computerraum mit Approximations- oder Berechnungsaufgaben eingeschoben werden. Eine solche thematische Erweiterung lässt die Schüler das Genauigkeitsproblem ganz praktisch erleben. Beispiele wären Umsetzungen von Näherungsverfahren z.B. für Quadratwurzeln oder für π, oder die in der Computerberechnung „konvergente“ harmonische Reihe, wobei die „Konvergenz“ abhängig von der verwendeten Anzahl der Dezimalstellen ist (z.B. in DERIVE einfach zu demonstrieren). Aus der Praxis ergeben sich gegebenenfalls Fragen, die Schülergruppen mit Hilfe geeigneter Numerik-Textquellen theoretisch bearbeiten können. Der Schritt vom praktischen numerischen Problem zur Theorie - und vielleicht gar wieder zurück zur Praxis - entspricht dem wissenschaftlichen Vorgehen in dieser Teildisziplin der Mathematik.

Je nach Interessenlage der Kursteilnehmer könnte noch mehr Wert auf eine vertiefte Auseinandersetzung mit philosophischen Aspekten gelegt werden. Es empfiehlt sich dabei, einen Lehrer des Faches Philosophie - z. B. als „Experten“ in einer Expertenbefragung durch den ganzen Kurs - in das Kursgeschehen miteinzubeziehen. So könnten beispielsweise die Ideen von Plato oder der Erkenntnistheorie für die Kursarbeit nutzbar gemacht werden. Bei einer Betonung der philosophischen Dimension des Kursthemas ist es bereichernd, in die Aussagen der Quantenmechanik über das Weltbild der modernen Physik einzuführen.

Ebenfalls je nach Präferenz der Kursteilnehmer können auch Aspekte der Geschichte der Mathematik bzw. Physik im Pluskurs noch mehr Raum erhalten. Beispielsweise stellt das historische Umfeld der Entwicklung von Präzisionsgeräten sicherlich einen lohnenden Gegenstand der Betrachtung dar.
Im Kurs der Schülerakademie trat die historische Dimension leicht in den Hintergrund, weil kein Kursteilnehmer auf den Umfragezetteln vor dem Kursbeginn Interesse an diesem Bereich bekundet hatte. In Zwischenbemerkungen und Themen wie „der Grundlagenstreit in der Mathematik“ (Ältere Formalisten, Logizisten, Intuitionisten, Konstruktivisten, Neuere Formalisten, Gödel, etc.) oder „Archimedes...“ (s. Vortrag 16) kamen mathematik-geschichtliche Inhalte doch zu einigem Recht.

5. Literatur

Barth, F., Haller, R. [1]: *Stochastik Leistungskurs*, München 1983
Bildung und Begabung e.V. (Hrsg.) [2]: *Dokumentation zur Akademie Schulpforte ´98*, Bonn - Bad Godesberg 1998
Courant, R., Robbins, H. [3]: *Was ist Mathematik?* Heidelberg 1973
Deker, U., Thomas, H. [4]: *Unberechenbares Spiel der Natur – Die Chaos-Theorie*. In: Bild der Wissenschaft 1/83, S. 63-75, Stuttgart 1983
Feuerpfeil, J., Heigl, F. [5]: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Leistungskurs*, München 1987
Forster, O. [6]: *Analysis 1*, Braunschweig 1983
Hämmerlin, G. [7]: *Numerische Mathematik I*, Mannheim 1970
Hämmerlin, G., Hoffmann, K. [8]: *Numerische Mathematik*, Berlin Heidelberg 1989
Heuser, H. [9]: *Lehrbuch der Analysis (Teil 1)*, Stuttgart 1980
Jürgens, H., Peitgen, H., Saupe, D. [10]:*Bausteine des Chaos: Fraktale*, Heidelberg 1992
Kamke, D., Krämer, K. [11]: *Physikalische Grundlagen der Maßeinheiten*, Stuttgart 1977
Königsberger, K. [12]: *Analysis 1*, Berlin Heidelberg 1989

Kuntze, S. [13]: *Schriftliche Hausarbeit zum Thema „Wie genau ist genau ?“ Die Rolle der Genauigkeit beim Umgang mit Zahlen und bei der argumentativen Formulierung von Gedankengängen - Anregungen für einen Pluskurs Mathematik in der Oberstufe des Gymnasiums*, München 1999

Kuntze, S. [14]: *Unter die Lupe genommen: Was heißt „genau“?* In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 48, Heft 1, Februar 2002

Lichten, W. [15]: *Skriptum Fehlerrechnung*, Berlin Heidelberg 1988

Luchner, K., Worg, R. [16]: *Chaotische Schwingungen - Beobachtung, Simulation, Interpretation.* In: PdN-Ph. 4 / 35. Jahrgang (1986), S. 9-22

Luchner, K., Worg, R. [17]: *Harmonische und chaotische Schwingungen*, Bonn 1987 In: MNU 40/6, S. 337-343

LMU München [18]: *Versuchsanleitungen zum Anfängerpraktikum in Experimentalphysik (Sommersemester 1991)*, München 1991

Maxwell, J.C. [19]: *Science and Free Will*. In: Campbell, L., Garnett, W.: The Life of James Clerk Maxwell, New York 1969

Oppel, U. [20]: Vorlesungsskriptum zur Vorlesung MIA-Analysis (Wintersemester 1991/92) (LMU München)

Schneider, K. [21]: *Über 100000 Nachkommastellen von* $\sqrt{2}$ *.* In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 48, Heft 1, Februar 2002

Schroeder, M. [22]: *Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit: Notizen aus dem Paradies der Unendlichkeit*, Heidelberg 1994

Schwichtenberg, K. [23]: Vorlesungsskriptum zur Vorlesung MIA-Analysis (Wintersemester 1992/93) (LMU München)

Sexl, R. [24]: *Was die Welt zusammenhält – Physik auf der Suche nach dem Bauplan der Natur*, Frankfurt am Main Berlin Wien 1984

Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung (Hrsg.) [25]: *Handreichungen für den Physikunterricht - Band 4: Computereinsatz im Physikunterricht*, München 1996

Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung (Hrsg.) [26]: *Handreichungen für den Mathematik- und Physikunterricht im Gymnasium: Fraktale Geometrie und deterministisches Chaos*, München 1997

Walter, W. [27]: *Analysis 1*, Berlin Heidelberg 1992

Sebastian Kuntze
Waldsaumstr. 16
81377 München

Johanna Winkler
Lehrer-Wirth-Str. 38
81829 München