



UNIVERSITÄT
LEIPZIG

„Das ist mir zu abstrakt“ – Eine Untersuchung mathematischer Übungsaufgaben im Fach Analysis I

Ludwigsburg, 15.11.2019

Felix Wlassak

Gliederung

1. Übungsaufgaben an der Hochschule
2. Theorien zur Abstraktion
3. Klassifikationsschema
4. Ergebnisse
5. Diskussion

ÜBUNGS-AUFGABEN IN DER STUDIENEINGANGSPHASE

- Wöchentlich gestellt (Püschl et al., 2016)

ÜBUNGS-AUFGABEN IN DER STUDIENEINGANGSPHASE

- Wöchentlich gestellt (Püschl et al., 2016)
- Klausurzulassung erfordert Abgabe der Übungsaufgaben

ÜBUNGS-AUFGABEN IN DER STUDIENEINGANGSPHASE

- Wöchentlich gestellt (Püschl et al., 2016)
- Klausurzulassung erfordert Abgabe der Übungsaufgaben
- Überwiegend „Probleme, die intensive Auseinandersetzung mit Vorlesungsinhalten verlangen“ (Liebendörfer, 2018)

ÜBUNGS-AUFGABEN IN DER STUDIENEINGANGSPHASE

- Wöchentlich gestellt (Püschl et al., 2016)
- Klausurzulassung erfordert Abgabe der Übungsaufgaben
- Überwiegend „Probleme, die intensive Auseinandersetzung mit Vorlesungsinhalten verlangen“ (Liebendörfer, 2018)
- Verlangen meist mehrere Kompetenzen (Frischemeier et al., 2016)

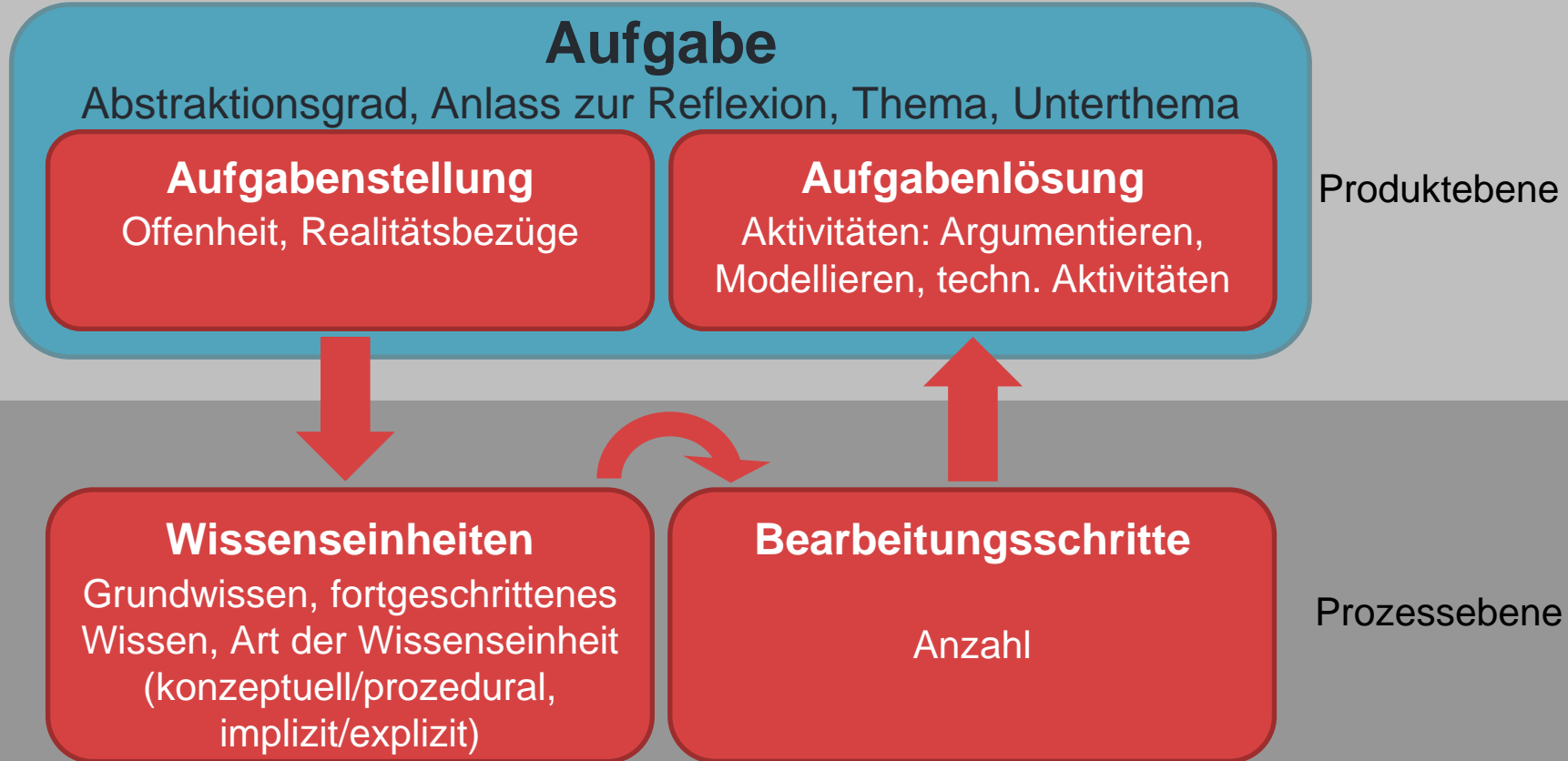
ÜBUNGS-AUFGABEN IN DER STUDIENEINGANGSPHASE

- Wöchentlich gestellt (Püschl et al., 2016)
- Klausurzulassung erfordert Abgabe der Übungsaufgaben
- Überwiegend „Probleme, die intensive Auseinandersetzung mit Vorlesungsinhalten verlangen“ (Liebendörfer, 2018)
- Verlangen meist mehrere Kompetenzen (Frischemeier et al., 2016)
- Wenige Studierende lösen die Aufgaben selbstständig (Liebendörfer und Göller, 2016; Rach, 2014)

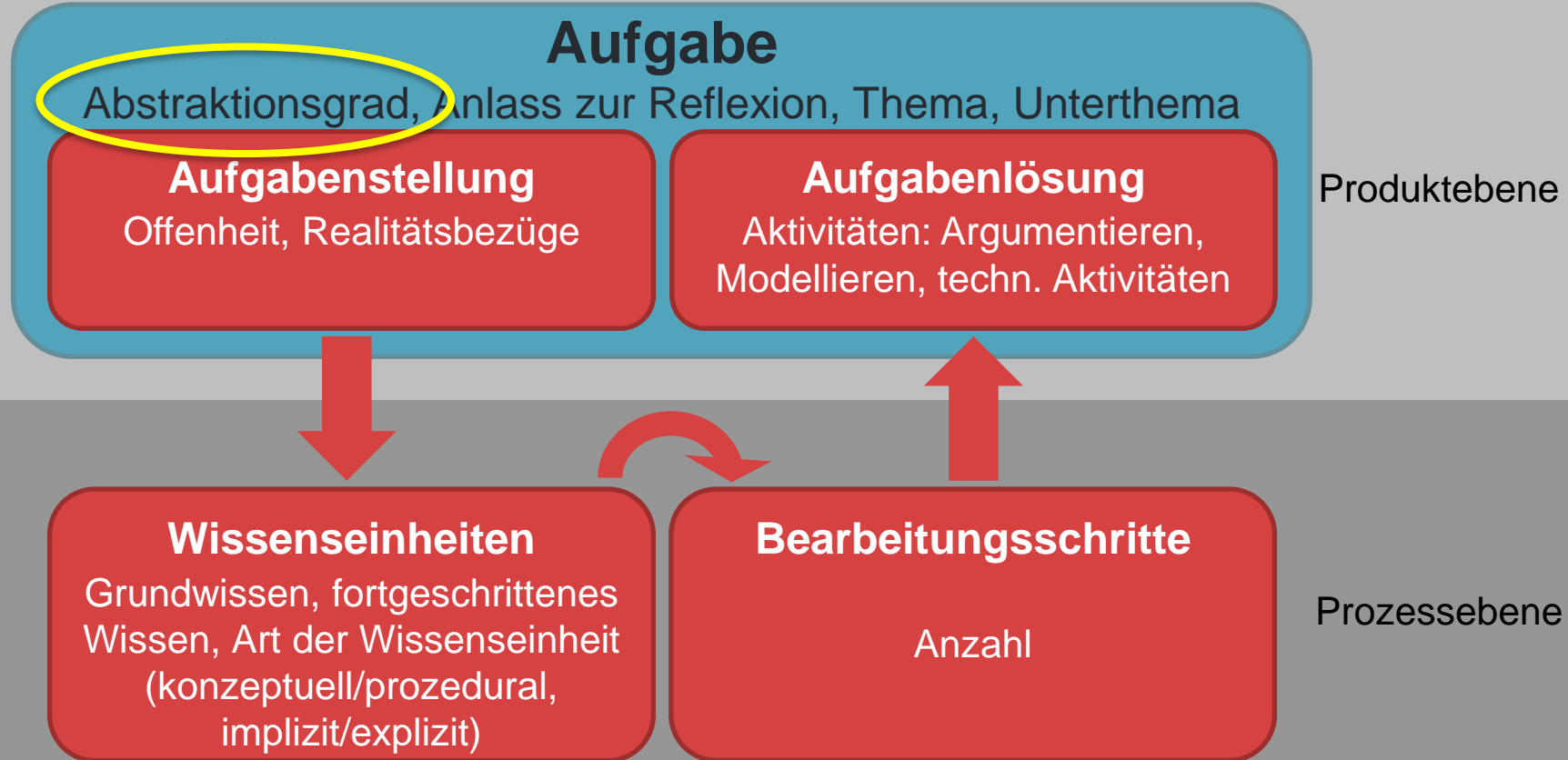
ÜBUNGS-AUFGABEN IN DER STUDIENEINGANGSPHASE

- Wöchentlich gestellt (Püschl et al., 2016)
- Klausurzulassung erfordert Abgabe der Übungsaufgaben
- Überwiegend „Probleme, die intensive Auseinandersetzung mit Vorlesungsinhalten verlangen“ (Liebendörfer, 2018)
- Verlangen meist mehrere Kompetenzen (Frischemeier et al., 2016)
- Wenige Studierende lösen die Aufgaben selbstständig (Liebendörfer und Göller, 2016; Rach, 2014)
- Entwicklungsforschung zu Übungsaufgaben (Bauer, 2013), aber **keine deskriptiven Studien zu Übungsaufgaben**

MODELL: AUFGABENMERKMALE



MODELL: AUFGABENMERKMALE



ABSTRAKTE AUFGABEN

- Übungsaufgaben erfordern abstraktes Wissen (Ableitinger, 2013)
 - „Abstrakter“ als Aufgaben in der Schulmathematik (ebd.)
 - „Abstraktionsschock“ (Herrmann, 2012)
-
- Wie kann man Abstraktion in Aufgaben feststellen?
 - Genauer: Wie kann man feststellen, dass eine Aufgabe abstrakter ist als eine andere?

CHARAKTER DER HOCHSCHULMATHEMATIK

- Deduktiver Aufbau anhand eines innermathematischen Regelsystems (Quinn, 2012)
- Objekte durch Definition konstituiert (Liebendörfer, 2017)
- „To understand the essence of mathematical proof we need to overcome the limits of everyday thinking.“ (Jahnke, 2008)
→ abstraktes Denken vs. alltägliches Denken
- Mathematik als abstrakte Struktur(-wissenschaft) (Henn und Müller, 2013)

ABSTRAKTE SCHULMATHEMATIK?

- Ziel: Abstraktionsfähigkeit (Loslösen von Inhaltsbezug) auch in der Schule (Cramer et al., 2011)
- Schulmathematik auf verschiedenen Abstraktionsstufen (Langemann, 2015)
- Häufig empirisch-anschauliche Einführung der Begriffe (Witzke, 2014)

ABSTRAKTE HOCHSCHULMATHEMATIK?

- Werkzeuge Hochschulmathematik: Abstraktion durch Verallgemeinerung und Formalisierung (Körner, 2015)
 - Sprung im Denkniveau zur abstrakten Welt der Beweise (Grünwald, 2004)
 - Hochschulmathematik in Bezug auf Abstraktionsniveau anspruchsvoll (Hazzan, 1999; Hefendehl-Hebeker, 2013)
- Abstrakt heißt aber nicht unbedingt schwierig (Dörfler, 2006; White, 1992)

ABSTRAKTION – EIN VIEL DISKUTIERTER BEGRIFF

- Verschiedene Perspektiven: z.B. Empirische vs. Theoretische Abstraktion
 - Verschiedene Wissenschaften: Mathematikdidaktik, Philosophie, Kognitive Psychologie, Allgemeine Didaktik
 - Kein einheitliches Bild
- Präzisierung des Begriffs nötig

EMPIRISCHE ABSTRAKTION

- Von bestimmten Eigenschaften eines sinnlich wahrnehmbaren Gegenstands absehen (Peschek, 1989; Piaget, 1972)
- Erkenntnisfunktion: Erkanntes entsprechend praktischer Handlungen umformen (Rubinstein, 1972)
- Keine Möglichkeit, sinnlich nicht wahrnehmbare Eigenschaften zu betrachten

EMPIRISCHE ABSTRAKTION

- Von bestimmten Eigenschaften eines sinnlich wahrnehmbaren Gegenstands absehen (Peschek, 1989; Piaget, 1972)
- Erkenntnisfunktion: Erkanntes entsprechend praktischer Handlungen umformen (Rubinstein, 1972)
- Keine Möglichkeit, sinnlich nicht wahrnehmbare Eigenschaften zu betrachten
- Bsp.:



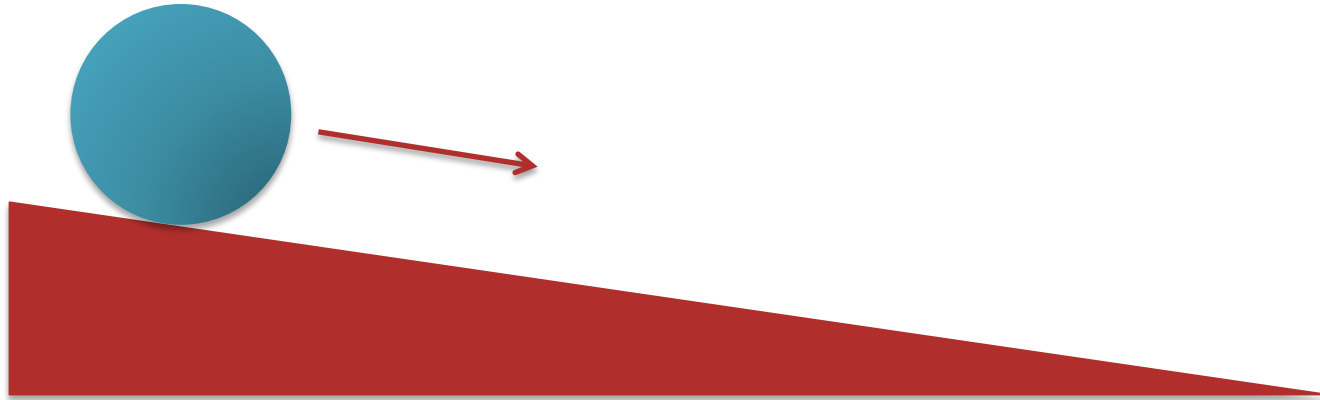
PSEUDO-EMPIRISCHE ABSTRAKTION

- Handlungen mit Objekten fokussiert (Piaget, 1972; Tall, 2007)
- Führt zu Urteil, das ohne Befragung der Wirklichkeit auskommt (Montada, 1970)

PSEUDO-EMPIRISCHE ABSTRAKTION

- Handlungen mit Objekten fokussiert (Piaget, 1972; Tall, 2007)
- Führt zu Urteil, das ohne Befragung der Wirklichkeit auskommt (Montada, 1970)

– Bsp.:



THEORETISCHE ABSTRAKTION

- Statt Handlungen werden (nicht unbedingt sinnlich wahrnehmbare) Beziehungen zwischen Objekten fokussiert (Dawydov, 1990)
- Vorhandene Abstraktionen in komplexere Struktur organisieren (Ohlsson und Lehtinen, 1997)
- Konstruktiver Prozess der Bedeutungsanreicherung (Sinaceur, 2014)
- Bsp.: Kommutativgesetz

ABSTRAKTION IN DER MATHEMATIK I

- „Abstracting is an activity by which we become aware of similarities (in the everyday sense) among our experiences.“ (Skemp, 1986)
- „...abstraction (as) the isolation of specific attributes of a concept so that they can be considered separately from the other attributes.“ (Tall, 1988)
- „Abstraction is an activity of reorganizing previously constructed mathematics into a new mathematical structure.“ (Dreyfus et al., 2015; Hershkowitz et al., 2001)

ABSTRAKTION IN DER MATHEMATIK I

- „Abstracting is an activity by which we **become aware of similarities** (in the everyday sense) among our experiences.“ (Skemp, 1986)
- „...abstraction (as) the **isolation of specific attributes** of a concept so that they can be considered separately from the other attributes.“ (Tall, 1988)
- „Abstraction is an activity of reorganizing previously constructed mathematics into a new mathematical structure.“ (Dreyfus et al., 2015; Hershkowitz et al., 2001)

ABSTRAKTION IN DER MATHEMATIK I

- „Abstracting is an activity by which we **become aware of similarities** (in the everyday sense) among our experiences.“ (Skemp, 1986)
- „...abstraction (as) the **isolation of specific attributes** of a concept so that they can be considered separately from the other attributes.“ (Tall, 1988)
- „Abstraction is an activity of **reorganizing previously constructed mathematics** into a new mathematical structure.“ (Dreyfus et al., 2015; Hershkowitz et al., 2001)

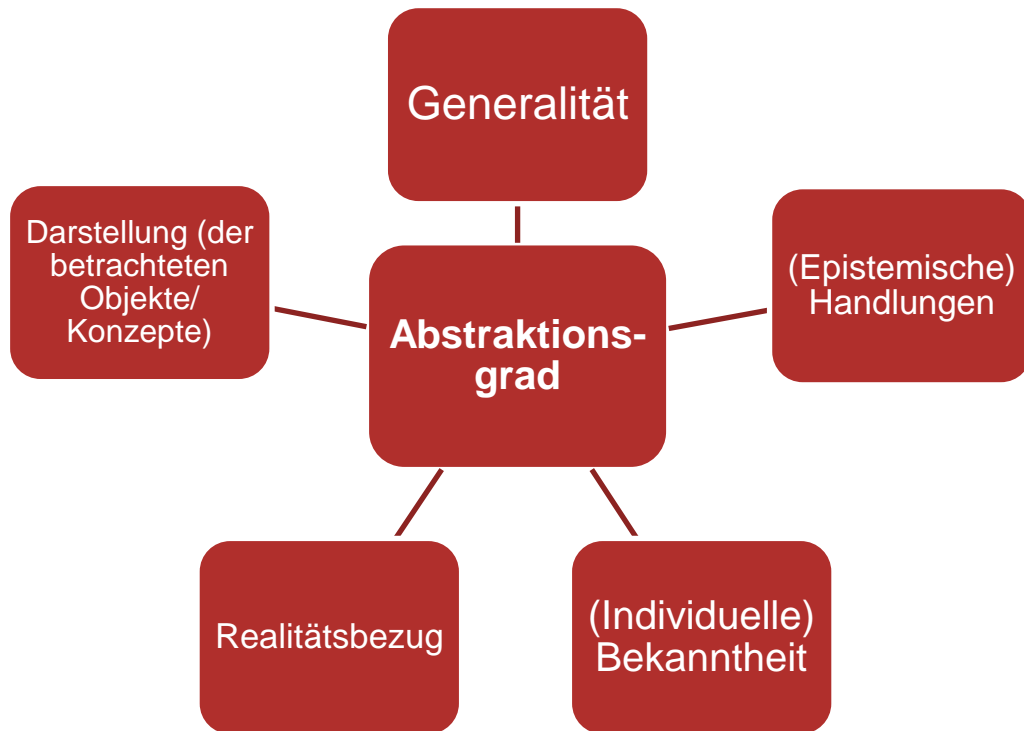
ABSTRAKTION IN DER MATHEMATIK II

- Sowohl Aspekte **Empirischer** als auch **Theoretischer** Abstraktion (Hershkowitz et al., 2001; Michelmore und White, 2004)
- Erkennen von Ähnlichkeiten: **Empirische Abstraktion** (Skemp, 1986)
- Vertikale Mathematisierung: **Theoretische Abstraktion** (Hershkowitz et al., 2001)

ABSTRAKTION IN DER MATHEMATIK II

- Sowohl Aspekte **Empirischer** als auch **Theoretischer** Abstraktion (Hershkowitz et al., 2001; Michelmore und White, 2004)
 - Erkennen von Ähnlichkeiten: **Empirische Abstraktion** (Skemp, 1986)
 - Vertikale Mathematisierung: **Theoretische Abstraktion** (Hershkowitz et al., 2001)
- Welche Aspekte des Abstraktionsprozesses können der produktorientierten Untersuchung von Übungsaufgaben (und ihren Lösungen) zugänglich gemacht werden?

ASPEKTE DER ABSTRAKTION





GENERALITÄT

- Regeln in mehreren Situationen/auf mehrere Objekte anwendbar (Strachota, 2016)
- Ausweiten des Geltungsbereichs von Überlegungen (Winkler, 2018)
- Abheben eines konkreten Falls von allen Zufälligkeiten (Matros, 2006)

- Häufig Abstraktion mit Generalisierung gleichgesetzt
- Konsens: Generalisierung als Bestandteil von Abstraktion (Ferrari, 2003; Mitchelmore und White, 2000; Nurhasanah et al., 2017; Schreiner und Pinto, 2016; Staub und Stern, 1997)

OPERATIONALISIERUNG GENERALITÄT

- 0 – einzelne Objekte als Stellvertreter eines Konstruktes
- 1 – mehrere Objekte als Stellvertreter eines Konstruktes
- 2 – Konstrukt ganzheitlich betrachtet





(EPISTEMISCHE) HANDLUNG

- **RBC+C** Modell der Abstraktion (u.a. Dreyfus et al. 2015; Hershkowitz et al. 2001 und 2007)

Recognizing – Wiedererkennen eines/r vorher bekannten Objektes / Struktur

Building-With – Verwenden und Kombinieren bekannter Konstrukte

Constructing – Zusammenfügen und Integrieren bekannter Konstrukte zu einem neuen Konstrukt

+

Consolidation – Bewusstmachen des Konstrukts, Gewinnen von Flexibilität

OPERATIONALISIERUNG (EPISTEMISCHE) HANDLUNG

- 0 – (bloßes) schematisches Rechnen / Umgehen ohne Einordnung in Oberkategorie
- 1 – Einordnen / Wiedererkennen / Kombinieren
- 2 – Konstruieren / Abstrahieren



(INDIVIDUELLE) BEKANNTHEIT

- Abstraktion aus Objekt-Person-Dualität (Hazzan, 1999)
- Abstraktionsgrad als individuelles Kriterium (Sinaceur, 2014; Willensky, 1991)





(INDIVIDUELLE) BEKANNTHEIT

- Abstraktion aus Objekt-Person-Dualität (Hazzan, 1999)
- Abstraktionsgrad als individuelles Kriterium (Sinaceur, 2014; Willensky, 1991)

Operationalisierung:

- 0 – Objekte spielen große Rolle in Schulmathematik
- 1 – Objekte spielen geringe Rolle in Schulmathematik
- 2 – Objekte spielen keine Rolle in Schulmathematik

REALITÄTSBEZUG

- Theorien zur Empirischen Abstraktion → Objekte / Konstrukte sind abstrakter, wenn sie nicht wahrnehmbar sind (Sinaceur, 2014)
- Abstraktion als Loslösung von Kontext (Ferrari, 2003; Schreiner und Pinto, 2016)





REALITÄTSBEZUG

- Theorien zur Empirischen Abstraktion → Objekte / Konstrukte sind abstrakter, wenn sie nicht wahrnehmbar sind (Sinaceur, 2014)
- Abstraktion als Loslösung von Kontext (Ferrari, 2003; Schreiner und Pinto, 2016)

Operationalisierung:

- 0 – ja / authentisch
- 1 – ja / konstruiert
- 2 – nein

DARSTELLUNG (DER BETRACHTETEN OBJEKTE)

- Umgang mit „abstrakten Objekten“ nur mit Zeichensystemen möglich (Dörfler, 2015)
- Abstrakte Objekte haben multiple Repräsentationsformen (ebd.)
- EIS-Prinzip nach Bruner (1971) lässt Stufung zwischen abstrakt und konkret zu (Hilgers, 2019)



DARSTELLUNG (DER BETRACHTETEN OBJEKTE)

- Umgang mit „abstrakten Objekten“ nur mit Zeichensystemen möglich (Dörfler, 2015)
- Abstrakte Objekte haben multiple Repräsentationsformen (ebd.)
- EIS-Prinzip nach Bruner (1971) lässt Stufung zwischen abstrakt und konkret zu (Hilgers, 2019)

Operationalisierung:

- 0 – Ikonisch
- 1 – Symbolisch
- 2 – Transfer



FORSCHUNGSFRAGEN

- I. Wie sehen Muster des Abstraktionsgrades in den Übungsaufgaben zu den Vorlesungen Analysis I aus?
- II. Inwiefern entwickelt sich der Abstraktionsgrad der Übungsaufgaben zu den Vorlesungen Analysis I im Laufe eines Semesters?
- III. Wie groß sind die Unterschiede im Abstraktionsgrad der Übungsaufgaben zwischen den einzelnen Vorlesungen verschiedener Universitäten?

DATENSATZ

Gesamtdatensatz:

- 312 Serien (Analysis I)
- 22 Universitäten (8 Bundesländer)
- WS 18/19

Stichprobe:

- Obligatorische Übungsserien von 8 Universitäten gezogen
- Aus 5 Bundesländern
- 1159 Aufgaben

ERGEBNISSE I

Häufigkeitstabelle

Merkmals					
0					
1					
2					
Cohens κ					

ERGEBNISSE I

Häufigkeitstabelle

Merkmals	Generalität				
0	55,9%				
1	7,8%				
2	36,3%				
Cohens κ	.84				

- 0 – einzelne Objekte als Stellvertreter eines Konstruktes
- 1 – mehrere Objekte als Stellvertreter eines Konstruktes
- 2 – Konstrukt ganzheitlich betrachtet

ERGEBNISSE I

Häufigkeitstabelle

Merkmals	Generalität	Realitäts- bezüge			
0	55,9%	0,1%			
1	7,8%	1,3%			
2	36,3%	98,6%			
Cohens κ	.84	.54			

- 0 – ja / authentisch
- 1 – ja / konstruiert
- 2 – nein

ERGEBNISSE I

Häufigkeitstabelle

Merkmalskategorie	Generalität	Realitätsbezüge	Bekanntheit		
0	55,9%	0,1%	6,9%		
1	7,8%	1,3%	16,6%		
2	36,3%	98,6%	76,5%		
Cohens κ	.84	.54	.68		

- 0 – Objekte spielen große Rolle in Schulmathematik
- 1 – Objekte spielen geringe Rolle in Schulmathematik
- 2 – Objekte spielen keine Rolle in Schulmathematik

ERGEBNISSE I

Häufigkeitstabelle

Merkmal	Generalität	Realitäts- bezüge	Bekanntheit	Handlung	
0	55,9%	0,1%	6,9%	76,1%	
1	7,8%	1,3%	16,6%	20,0%	
2	36,3%	98,6%	76,5%	3,9%	
Cohens κ	.84	.54	.68	.68	

- 0 – (bloßes) schematisches Rechnen / Umgehen ohne Einordnung in Oberkategorie
- 1 – Einordnen / Wiedererkennen / Kombinieren
- 2 – Konstruieren / Abstrahieren

ERGEBNISSE I

Häufigkeitstabelle

Merkmal	Generalität	Realitäts- bezüge	Bekanntheit	Handlung	Darstellung
0	55,9%	0,1%	6,9%	76,1%	2,0%
1	7,8%	1,3%	16,6%	20,0%	86,8%
2	36,3%	98,6%	76,5%	3,9%	11,2%
Cohens κ	.84	.54	.68	.68	.62

- 0 – Ikonisch
- 1 – Symbolisch
- 2 – Transfer

ERGEBNISSE II

– **Abstraktionsgrad A =**

ERGEBNISSE II

- **Abstraktionsgrad A = (0,5G)**
 - G – Generalität

ERGEBNISSE II

- **Abstraktionsgrad $A = (0,5G + 0,2B)$**
 - G – Generalität
 - B – Bekanntheit

ERGEBNISSE II

- **Abstraktionsgrad $A = (0,5G + 0,2B + 0,2H)$**
 - G – Generalität
 - B – Bekanntheit
 - H – Handlung

ERGEBNISSE II

- **Abstraktionsgrad $A = (0,5G + 0,2B + 0,2H + 0,05R)$**
 - G – Generalität
 - B – Bekanntheit
 - H – Handlung
 - R – Realitätsbezüge

ERGEBNISSE II

- **Abstraktionsgrad $A = (0,5G + 0,2B + 0,2H + 0,05R + 0,05D)$**
 - G – Generalität
 - B – Bekanntheit
 - H – Handlung
 - R – Realitätsbezüge
 - D – Darstellung

ERGEBNISSE II

- **Abstraktionsgrad $A = (0,5G + 0,2B + 0,2H + 0,05R + 0,05D)/2$**
 - G – Generalität
 - B – Bekanntheit
 - H – Handlung
 - R – Realitätsbezüge
 - D – Darstellung

ERGEBNISSE II

- **Abstraktionsgrad $A = (0,5G + 0,2B + 0,2H + 0,05R + 0,05D)/2$**
 - G – Generalität
 - B – Bekanntheit
 - H – Handlung
 - R – Realitätsbezüge
 - D – Darstellung
- Entwicklung nach Wochen

Woche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	.59	.50	.56	.56	.56	.58	.53	.54	.54	.59	.53	.43	.53	.51

ERGEBNISSE III

- Häufigkeitsverteilung suggeriert kaum Zusammenhang
- Chi-Quadratetest liefert $\chi^2 = 1016,047$; $df = 520$; Signifikanz .000
- Woche und Abstraktionsgrad sind nicht unabhängig
- $r = -0,086$
- Leichte negative Korrelation als Indiz für „Abstraktionsschock“? (Herrmann, 2012)

ERGEBNISSE IV

- Zusammenhang: Dozent/Abstraktionsgrad

Universität	A	B	C	D	E	F	G	H
Abstraktionsgrad	.49	.43	.47	.71	.64	.47	.74	.58

- Alle (Mittelwerts-)Unterschiede zwischen den Universitäten sind signifikant, außer der zwischen C und F
- Effektstärken zwischen $d = 0,22$ und $d = 1,13$

ZUSAMMENFASSUNG

- Häufige Betrachtung von Einzelobjekten
- Selten Aufgaben mit abstrahierenden Handlungen
- (Schwacher) negativer Zusammenhang zwischen Woche und Abstraktionsgrad
- Z.T. starker Zusammenhang zwischen Dozent und Abstraktionsgrad



UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Felix Wlassak

Universität Leipzig

Mathematisches Institut

Abteilung Didaktik

wlassak@math.uni-leipzig.de