

## **Teaching Thinking in der Mathematik – Eine empirische Bestimmung zentraler Prozesse**

**Christian Spannagel und Andreas Zendler**

**University of Education Ludwigsburg**

**Abstract.** In prozessorientierten didaktischen Ansätzen wird hervorgehoben, dass Kinder und Jugendliche neben Inhaltskonzepten insbesondere auch Denk- und Arbeitsweisen, also Prozesse, erlernen sollen. Der Mathematik wird dabei oft eine wichtige Rolle zuerkannt, da Mathematik treiben mit logischem und systematischem Denken in Verbindung gebracht wird. Nimm man einen prozessorientierten Standpunkt im Sinne des „Teaching-Thinking-Ansatzes“ beim Lehren und Lernen von Mathematik ein, so muss zunächst geklärt werden, welche allgemeinen Prozesse in mathematischen Lehr-Lern-Szenarien gefördert werden sollen. Der vorliegende Artikel leistet einen Beitrag zur Bestimmung der allgemeinen Prozesse, die eine zentrale Rolle in der Mathematik spielen und damit auch beim Mathematiklernen berücksichtigt werden sollten. Bei der Ermittlung der Prozesse wurde mit empirischen Mitteln vorgegangen, um subjektive Einflüsse abzuschwächen. Experten bewerteten 44 Prozesse hinsichtlich vier Kriterien. Eine Clusteranalyse lieferte die folgenden zentralen Prozesse für das Mathematiklernen: *deductive reasoning, analyzing, generalizing, problem solving and problem posing, finding cause-and-effect relationships* und *finding relationships*. Gemeinsam mit den Prozessprofilen anderer Wissenschaften können die vorliegenden Ergebnisse als Basis für die Planung prozessorientierter Lehr-Lern-Szenarien in verschiedenen Kontexten dienen.

**Keywords:** mathematics education, central processes, teaching thinking.

**Contact:** {spannagel, zendler}@ph-ludwigsburg.de

### **1. Einleitung**

Bei der Formulierung von Lernzielen im Bildungsbereich geht es längst nicht mehr nur um die Festlegung zu behandelnder Inhalte. Es rücken hingegen immer mehr die individuellen Prozesse der Kinder und Jugendlichen im Umgang mit Wissen, also Lern- und Denkprozesse, in den Mittelpunkt des didaktischen Interesses (vgl. Mandl & Friedrich, 1992; OECD, 1999; Bolhuis, 2003). Die Fokussierung von Denk- und Arbeitsweisen ist zentrales Anliegen prozessorientierter didaktischer Ansätze (Parker & Rubin, 1966; Costa & Liebmann, 1997a, 1997b, 1997c). Lernende sollen sich nicht nur Inhaltskonzepte aneignen, sondern vor allem das Denken lernen (*teaching thinking*; Barell, 1995; Crawford, Saul, Mathews, & Makinster, 2005; Bowkett, 2006; Brady, 2008). Das Erlernen von Denk- und Arbeitsweisen erfolgt dabei nicht separat (z.B. in einem eigenen Fach), sondern ist generelles Prinzip, das alle Lehr-Lern-Situationen durchzieht. Damit stellt sich die Frage, welche Denk-

und Arbeitsweisen (im Folgenden *Prozesse* genannt) im Kontext welcher Disziplinen gefördert werden sollen.

In einem disziplinären Kontext (z.B. Mathematik oder Informatik) sollten diejenigen Denk- und Arbeitsweisen schwerpunktmäßig gefördert werden, die zum einen eine zentrale Bedeutung in der entsprechenden Wissenschaftsdisziplin haben, zum anderen aber auch einen Allgemeinbildungscharakter und Bezüge zum Alltag aufweisen können. Zudem sollten sich die entsprechenden disziplinspezifischen Prozesse auch auf verschiedenen intellektuellen Niveaus im Sinne des Spiralcurriculums (Harden & Stamper, 1999) umsetzen lassen. Diese Forderungen wurden von Schwill (1993,1994) im Kontext der Bestimmung fundamentaler Ideen der Informatik aufgestellt und durch vier Kriterien spezifiziert. Übertragen auf die Bestimmung zentraler Prozesse einer Disziplin lassen sich diese Kriterien folgendermaßen fassen: Ein Prozess sollte in vielen Bereichen der entsprechenden Disziplin vielfältig angewendet werden (*Horizontalkriterium*), er soll auf verschiedenen intellektuellen Niveaus vermittelt werden können (*Vertikalkriterium*), er sollte über einen längeren Zeitraum in der Disziplin relevant sein (*Zeitkriterium*), und er sollte Bezüge zu Denken und/oder Sprache des Alltags aufweisen können (*Sinnkriterium*).

Insbesondere der Mathematik wird oft zu gute gehalten, dass sie sich dazu eignet, die allgemeine Denkfähigkeit zu fördern. Die Mathematik ist eine *Formal-* bzw. *Strukturwissenschaft* (vgl. Bunge, 1967), und ihre Gegenstände sind gedankliche Objekte und abstrakten Strukturen.<sup>1</sup> Der Umgang mit diesen Objekten ist in der Regel eine intellektuelle Herausforderung. Daher wird oft als Begründung für Mathematik als allgemeinbildendes Schulfach angeführt, dass sie das abstrakte Denken, das Lösen von Problemen, die Intelligenz und geistige Fähigkeiten im Allgemeinen fördere (vgl. Heymann, 1996). Heymann (1996) diskutiert diese These und kommt zu der gemäßigten Formulierung, dass im allgemeinbildenden Mathematikunterricht die Lernenden erfahren sollten, „daß und wie sich Mathematik als ‚Verstärker‘ ihres Alltagsdenkens einsetzen läßt“ (Heymann, 1996, S. 206). Im Sinne seiner Kontinuitätshypothese kann die Schulung mathematischen Denkens zum systematischeren Gebrauch des Alltagsdenkens führen. Positive Effekte von Mathematikunterricht auf das allgemeine Denken stellen sich aber nicht von selbst ein. Laut Heymann (1996) muss Mathematikunterricht, der das Denken fördern soll, verstehensorientiert und an das alltägliche Denken angebunden sein.

Wenn man einen prozessorientierten Standpunkt einnimmt und in mathematischen Lehr-Lern-Szenarien auch die allgemeinen Denk- und Arbeitsweisen fördern möchte, dann stellt sich die Frage, *welche Prozesse* sich besonders zur Förderung beim Mathematiklernen im oben beschriebenen Sinne eignen. Bildungsstandards für Mathematik führen mittlerweile neben Inhaltskonzepten (bzw. Leitideen) auch

---

<sup>1</sup> Mathematische Objekte und Strukturen können natürlich durchaus einen Realbezug haben, etwa indem reale Problemsituationen durch mathematische Strukturen modelliert werden. „Mathematik ist ein Werkzeug, die Welt zu beschreiben.“ (Beutelspacher, 2001, S. 10). Dennoch sind diese realen Objekte nicht Gegenstand der Mathematik, sondern die ihnen innewohnenden abstrakten Strukturen und allenfalls die Übersetzung zwischen realweltlichen und mathematischen Elementen.

mathematische Prozesse auf (wie beispielsweise „Problemlösen“, „Argumentieren“, „Kommunizieren“, „Modellieren“ und „Darstellen“; vgl. NCTM, 2000; KMK, 2003, 2004a, 2004b). Die Auswahl dieser Prozesse beruht aber in der Regel auf mathematischen bzw. mathematikdidaktischen Überlegungen, und es wird eher weniger von der Förderung allgemeiner Denkfähigkeit ausgegangen. So bezieht sich beispielsweise der Prozess „Argumentieren“ tendenziell eher darauf, dass die Kinder und Jugendlichen lernen sollen, *innermathematisch zu argumentieren*, und weniger darauf, dass Mathematik sich als *Kontext des Erwerbs der allgemeinen Fähigkeit des Begründens* eignet. Sicherlich werden in den Standards auch allgemeine, d.h. mathematikunabhängige, Denkprozesse berücksichtigt. Die Bildungsstandards beantworten aber tendenziell eher die Frage, welche Prozesse aus Sicht der Mathematik bzw. Mathematikdidaktik für das Mathematiklernen relevant sind, aber weniger, welche allgemeinen Denkprozesse in mathematischen Kontexten gefördert werden können. Beide Sichten schließen sich nicht gegenseitig aus. Es kann hingegen erwartet werden, dass sich beide Perspektiven zu einem reichhaltigeren Gesamtbild ergänzen können. Hierzu soll der vorliegende Artikel einen Beitrag liefern.

In diesem Artikel wird eine Untersuchung beschrieben, in der diejenigen allgemeinen Denk- und Arbeitsweisen mittels einer Expertenbefragung bestimmt werden, die beim Mathematiklernen berücksichtigt werden sollten. Diese werden unter Verwendung der vier Schwillschen Kriterien empirisch ermittelt. Ein empirisches Verfahren wird gewählt, um subjektive Einflüsse abzuschwächen.

Dasselbe Verfahren wurde bereits von Zendler, Spannagel und Klaudt (2008) zur Bestimmung der zentralen Prozesse für informatische Lehr-Lern-Szenarien angewendet. Gemeinsam mit der in diesem Artikel beschriebenen Untersuchung können somit die Prozessprofile der beiden Disziplinen Mathematik und Informatik verglichen und kontrastiert werden.

In Abschnitt 2 werden die grundlegenden Voraussetzungen für die empirische Untersuchung beschrieben. Abschnitt 3 enthält eine detaillierte Darstellung der Durchführung und Auswertung der Studie. Ebenso werden die Ergebnisse ausführlich diskutiert. In Abschnitt 4 werden die Resultate kurz zusammengefasst und ein Ausblick auf Folgeuntersuchungen gegeben.

## 2. Ausgangslage

Als Basis für die Bestimmung der zentralen Prozesse für mathematische Lehr-Lern-Szenarien dienen 44 Prozesse, die von Costa und Liebmann (1997a) als allgemeinbildende Prozesse im Rahmen ihres *Process-as-Content*-Ansatzes vorgeschlagen werden. Diese Prozesse sind in Tabelle 1 in alphabetischer Reihenfolge aufgeführt. Costa und Liebmann geben für jeden dieser Prozesse eine kurze Charakterisierung. So definieren sie beispielsweise den Prozess *analyzing* folgendermaßen: „Separating or breaking up a whole into its parts according to some plan or reason“ (Costa & Liebmann, 1997, S. 17). Die 44 Prozesse bilden zusammen mit ihren Charakterisierungen das Ausgangsmaterial für die Untersuchung.

Als Kriterien zur Entscheidung, ob es sich bei einem Prozesskonzept um einen zentralen Prozess für das Mathematiklernen handelt, werden die vier Schwill'schen Kriterien für fundamentale Ideen verwendet (Schwill, 1993, 1994). Jeder der 44 Prozesse wird anhand der vier Kriterien *Horizontalkriterium*, *Vertikalkriterium*, *Zeitkriterium* und *Sinnkriterium* im Kontext der Mathematik beurteilt. Ein Prozess soll dann als zentraler Prozess für das Mathematiklernen gelten, wenn er in den vier Kriterien eine hohe Bewertung erhält.

Tabelle 1. Prozesse nach Costa und Liebmann (1997a)

1	analyzing	23	intuiting
2	brainstorming	24	investigating
3	categorizing	25	meaning making
4	classifying	26	mediating and coaching
5	collaborating	27	networking
6	communicating	28	observing
7	comparing	29	operationalizing
8	consulting	30	ordering
9	contrasting	31	patterning
10	creating and inventing	32	presenting
11	decision making	33	prioritizing
12	deductive reasoning	34	problem solving and problem posing
13	facilitating	35	questioning
14	finding cause-and-effect relationships	36	researching
15	finding relationships	37	self-evaluating
16	forming, testing, and revising concepts and generalizations	38	sequencing
17	generalizing	39	summarizing
18	generating criteria	40	sylogistic reasoning
19	hypothesizing	41	synthesizing
20	imaging	42	transferring
21	inferring	43	transforming
22	inquiring	44	using metaphor

Für die Informatik liegen bereits Ergebnisse einer Untersuchung dieser Art vor (Zendler, Spannagel, & Klautdt, 2008). Es wurden die 44 Prozesskonzepte hinsichtlich der vier Kriterien von Informatikprofessorinnen und -professoren beurteilt. Die zentralen Prozesse für informatische Lehr-Lern-Szenarien sind nach

dieser Untersuchung u.a. folgende Prozesskonzepte: *problem solving and problem posing, classifying, finding relationships, investigating, analyzing* und *generalizing*.

Die in diesem Artikel beschriebene Studie wurde analog im Kontext Mathematik durchgeführt. Dazu wurden Mathematikprofessorinnen und –professoren gebeten, Prozesse hinsichtlich der vier genannten Kriterien einzuschätzen.

### **3. Empirische Untersuchung**

#### **3.1 Methode**

##### **3.1.1 Stichprobe**

Es wurden 120 Mathematikprofessorinnen und Mathematikprofessoren an 12 deutschen Hochschulen angeschrieben. Dabei wurden genau diejenigen Hochschulen berücksichtigt, die im Fach Mathematik nach dem CHE-Ranking 2006<sup>2</sup> die höchsten Werte in der Kategorie „Forschungsreputation“ erhalten haben (u.a. die Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, die Technische Universität München und die Westfälische Wilhelms-Universität Münster). 12 Rücksendungen waren gültig und gingen in die Auswertung ein (10% Rücklaufquote).

##### **3.1.2 Fragebogen**

Der in der Untersuchung verwendete Fragebogen besteht aus einem kurzen Einleitungsteil, der eine Liste der 44 Prozesse nach Costa und Liebmann (1997a) enthält, und dem eigentlichen Fragebogenteil. Der letztgenannte Teil besteht aus vier Abschnitten. In jedem Abschnitt werden alle Prozesse hinsichtlich eines der vier Schwillischen Kriterien beurteilt. Im ersten Abschnitt beispielsweise müssen die Befragten die folgende Aussage für alle 44 Prozesse bewerten: „Horizontalkriterium: Der Prozess ist in vielen Bereichen der Mathematik vielfältig anwendbar oder erkennbar.“ Eine Einschätzung wird dabei für jeden Prozess auf einer Skala von 0 (*trifft nicht zu*) bis 5 (*trifft voll zu*) vorgenommen. Im Anhang des Fragebogens befand sich außerdem ein Glossar, in dem die 44 Prozesse kurz erläutert wurden.

##### **3.1.3 Datenanalyse**

Die Analyse der Daten wird analog zur Untersuchung von Zendler, Spannagel und Klautt (2008) durchgeführt. Zunächst werden in einer deskriptiven Analyse die Mittelwerte aller Bewertungen getrennt für jeden Prozess errechnet. Auf dieser Basis wird eine Clusteranalyse durchgeführt, in der Cluster von Prozessen mit ähnlichen Bewertungen gebildet werden. Die Clusterlösung wird schließlich mit einer multivariaten Varianzanalyse auf ihre Validität hin überprüft.

---

<sup>2</sup> abrufbar unter <http://www.che.de> (letzter Zugriff am 19.9.2008); auszugsweise auch veröffentlicht in „Die Zeit. Studienführer 2006“

### 3.2 Ergebnisse

Die Ergebnisse werden in folgender Reihenfolge beschrieben:

- Zunächst werden die Resultate der deskriptiven Mittelwertanalyse angeführt (Abschnitt 3.2.1).
- In einem zweiten Schritt werden die Ergebnisse der Clusteranalyse im Detail dargestellt (Abschnitt 3.2.2).
- Anschließend werden die Ergebnisse der varianzanalytischen Validitätsanalyse beschrieben (Abschnitt 3.2.3).

Alle Daten wurden mit SPSS 16.0 ausgewertet.

#### 3.2.1 Deskriptive Datenanalyse

In der deskriptiven Datenanalyse wurden die Mittelwerte für jede Prozess-Kriterium-Kombination getrennt berechnet. Zudem wurden Gesamtmittelwerte für jeden Prozess gebildet. Abbildung 1 zeigt die Ergebnisse der Analyse, nach Gesamtmittelwerten absteigend sortiert.

Die fünf höchsten Gesamtmittelwerte erhielten die Prozesse *problem solving and problem posing*, *finding cause-and-effect relationships*, *deductive reasoning*, *generalizing* und *analyzing*, wobei die drei letztgenannten Prozesse denselben Gesamtmittelwert erzielten. Die fünf niedrigsten Gesamtmittelwerte wurden für die Prozesse *decision making*, *self-evaluating*, *mediating and coaching*, *facilitating* und *using metaphor* ermittelt.

Horizontalkriterium	Vertikalkriterium	Zeitkriterium	Sinnkriterium	Gesamtscore	Prozesse	Horizontalkriterium	Vertikalkriterium	Zeitkriterium	Sinnkriterium	Gesamtscore	Prozesse
4.58	4.17	4.83	4.17	4.44	problem solving and problem posing	3.83	3.08	3.75	3.92	3.65	categorizing
4.48	4.08	4.25	4.50	4.33	finding cause-and-effect relationships	4.00	2.75	4.08	3.75	3.65	researching
4.75	3.50	4.50	4.33	4.27	deductive reasoning	3.33	3.58	3.08	3.92	3.48	collaborating
4.67	3.67	4.67	4.08	4.27	generalizing	3.75	3.17	3.25	3.75	3.48	imaging
4.58	3.58	4.58	4.33	4.27	analyzing	3.83	3.25	3.17	3.58	3.46	patterning
4.33	3.83	4.17	4.50	4.21	finding relationships	3.83	3.00	3.42	3.25	3.38	sylogistic reasoning
4.33	3.42	4.50	4.00	4.06	investigating	3.58	2.92	3.08	3.75	3.33	synthesizing
4.17	3.50	4.17	4.17	4.00	classifying	2.67	3.42	3.17	3.92	3.29	observing
3.83	3.83	3.75	4.50	3.98	inquiring	2.75	3.42	2.83	4.08	3.27	consulting
4.33	3.25	4.08	4.08	3.94	hypothesizing	3.33	2.67	3.08	3.58	3.17	transforming
4.17	4.08	3.17	4.25	3.92	presenting	2.83	3.25	2.92	3.58	3.15	operationalizing
4.00	3.67	3.67	4.33	3.92	transferring	3.00	3.50	2.67	3.42	3.15	contrasting
3.83	3.83	3.92	4.00	3.90	questioning	3.25	3.00	2.92	3.33	3.13	inferring
3.75	3.42	4.08	4.33	3.90	creating and inventing	3.42	2.92	2.67	3.17	3.04	sequencing
3.92	3.92	3.50	4.08	3.85	comparing	2.67	2.92	2.42	3.50	2.88	prioritizing
4.00	3.50	3.75	3.92	3.79	generating criteria	2.58	2.42	2.42	3.92	2.83	networking
3.58	3.58	3.58	4.17	3.73	ordering	2.75	2.58	2.67	3.08	2.77	intuiting
3.67	3.25	3.83	4.17	3.73	summarizing	2.92	2.75	2.17	3.08	2.73	brainstorming
3.92	3.42	3.67	3.83	3.71	forming, testing, and revising concepts and generalizations	2.33	2.33	2.50	3.58	2.69	meaning making
3.58	3.58	3.42	4.25	3.71	communicating	2.08	2.25	2.25	3.67	2.56	decision making
						2.42	2.58	2.00	3.08	2.52	self-evaluating
						2.08	2.75	1.92	3.25	2.50	mediating and coaching
						2.42	2.25	2.25	3.00	2.48	facilitating
						2.25	2.67	2.08	2.75	2.44	using metaphor

Abbildung 1. Mittelwerte der Prozesse (N=12)

### 3.2.2 Clusteranalytische Auswertung

Zur Durchführung der Clusteranalyse wurden die Mittelwerte aller Prozesse bezüglich der vier Kriterien als Datenbasis verwendet. Hierdurch wurden Cluster von Prozessen ermittelt, die hinsichtlich der vier Kriterien ähnliche Mittelwerte erzielt haben. Als Verfahren zur Clusteranalyse wurde die Methode nach Ward (1963) angewendet (mit dem quadrierten euklidischen Abstand als Distanzmaß und unter Berücksichtigung des C-Index nach Hubert und Levin (1976) zur Bestimmung des Abbruchkriteriums; vgl. auch Zendler, Spannagel und Klautd, 2008).

Das Resultat der Analyse ist eine Clusterlösung, die aus 6 Clustern besteht. Davon werden drei Cluster als „Winner“-Cluster (kurz „W“- Cluster), zwei Cluster als „Intermediate“-Cluster (kurz „I“- Cluster) und ein Cluster als „Loser“-Cluster (kurz „L“- Cluster) bezeichnet. Die Mittelwerte innerhalb der Cluster werden jeweils als Heatmap veranschaulicht (Grinstein, Trutschl, & Cvek, 2001). Ebenso werden die sukzessiven Zusammenfassungen der Prozesse in Dendrogrammen visualisiert. Im Folgenden werden die Cluster im Einzelnen beschrieben.

#### Die „W“-Cluster

In Abbildung 2 sind drei Cluster abgebildet, die zusammen als „Winner“-Cluster bezeichnet werden. Sie bestehen insgesamt aus 23 Prozessen.

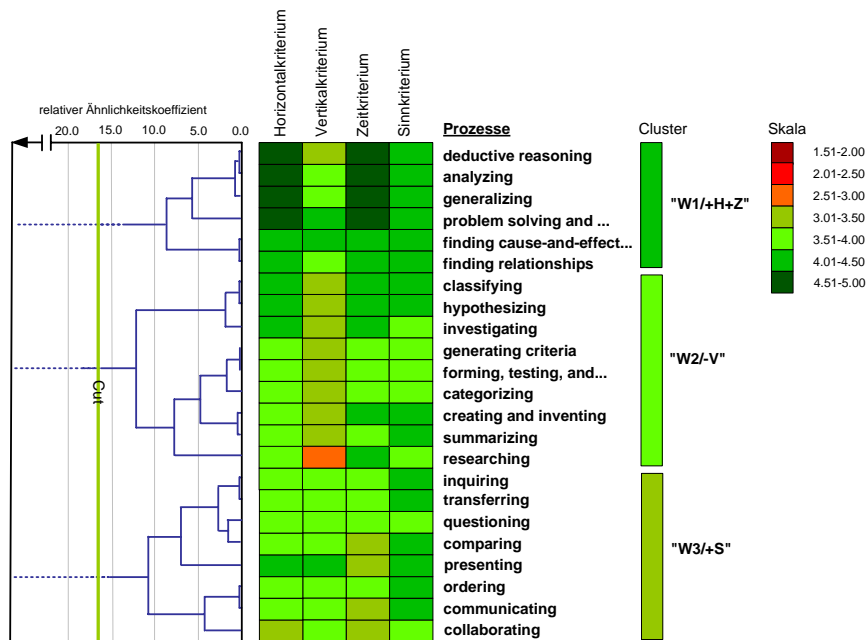


Abbildung 2. Clusterlösung für die „Winner“-Cluster

**„W1/+H+Z“-Cluster.** Das „W1/+H+Z“-Cluster besteht aus 6 Prozessen: *deductive reasoning, analyzing, generalizing, problem solving and problem posing, finding*

*cause-and-effect relationships* und *finding relationships*. Das Cluster zeichnet sich durch sehr hohe Werte im Horizontal- und im Zeitkriterium aus [Zentroid = (4.57, 3.81, 4.50, 4.32)]. Sehr früh werden die Prozesse *deductive reasoning*, *analyzing* und *generalizing* geclustert, ebenso werden die Prozesse *finding cause-and-effect relationships* und *finding relationships* aufgrund ihrer hohen Homogenität früh zusammengefasst. Die beiden letztgenannten Prozesse werden als letztes zum Gesamtcluster hinzugenommen.

**“W2/-V”-Cluster.** Das “W2/-V”-Cluster enthält 9 Prozesse: *classifying*, *hypothesizing*, *investigating*, *generating criteria*, *forming*, *testing*, *and revising concepts and generalizations*, *categorizing*, *creating and inventing*, *summarizing* und *researching*. Die Prozesse haben bezüglich des Horizontal-, der Zeit- und des Sinnkriteriums hohe Werte, zeichnen sich aber durch (im Vergleich mit dem Gesamtcluster) relativ niedrige Werte im Vertikalkriterium aus [Zentroid = (4.00, 3.29, 3.99, 4.02)]. Sehr früh zusammengefasst werden die Prozesse *classifying* und *hypothesizing*, *generating criteria* und *forming*, *testing*, *and revising concepts and generalizations* sowie die Prozesse *creating and inventing* und *summarizing*.

**“W3/+S”-Cluster.** Das “W3/+S”-Cluster besteht aus den folgenden 8 Prozessen: *inquiring*, *transferring*, *questioning*, *comparing*, *presenting*, *ordering*, *communicating* und *collaborating*. Dieses Cluster hat insbesondere bezüglich des Sinnkriteriums hohe Werte [Zentroid = (3.78, 3.76, 3.51, 4.19)]. Auffällig sind die frühen Zusammenfassungen der Prozesse *inquiring* und *transferring* und der Prozesse *ordering* und *communicating*.

### Die ‘T’ Cluster

Abbildung 3 zeigt die beiden „Intermediate“-Cluster. Zusammen genommen bestehen sie aus insgesamt 11 Prozessen. Aufgrund des Cuts (visualisiert im Dendrogramm in Abbildung 3) können beide Cluster nicht mehr zusammengefasst werden.

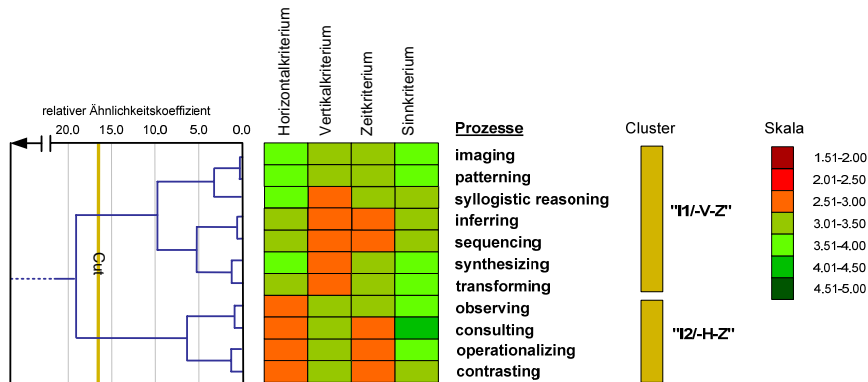


Abbildung 3. Clusterlösung für die „Intermediate“-Cluster



**“I1/-V-Z”-Cluster.** Das “I1/-V-Z”-Cluster besteht aus insgesamt 7 Prozessen: *imaging, patterning, syllogistic reasoning, inferring, sequencing, synthesizing* und *transforming*. Diese Prozesse haben insgesamt niedrige Werte im Vertikalkriterium, aber auch im Zeitkriterium [Zentroid = (3.61, 3.04, 3.08, 3.47)].

**“I2/-H-Z”-Cluster.** Das zweite “Intermediate”-Cluster besteht aus nur 4 Prozessen, nämlich *observing, consulting, operationalizing* und *contrasting*. Ebenso wie das “I1/-V-Z”-Cluster hat das “I2/-H-Z”-Cluster niedrige Werte im Zeitkriterium, dafür aber höhere Werte im Vertikalkriterium und niedrigere Werte im Horizontalkriterium [Zentroid = (2.81, 3.40, 2.90, 3.75)]. Zuerst werden sowohl die Prozesse *observing* und *consulting* also auch *operationalizing* und *contrasting* gruppiert und anschließend zu dem Gesamtcluster zusammengefasst.

### Das “L”-Cluster

Als letztes Cluster wird das “Loser”-Cluster beschrieben, das in Abbildung 4 dargestellt ist. Es enthält 10 Prozesse: *meaning making, decision making, networking, intuiting, brainstorming, prioritizing, self-evaluating, using metaphor, facilitating* und *mediating and coaching*. Das Gesamtcluster wird relativ spät durch Gruppierung von drei Teilclustern gebildet. Die Zusammenfassung in einem einzigen Cluster ist aufgrund der ähnlichen Werte und der geringen Anzahl der Prozesse in jedem Teilcluster trotzdem angemessen. Insgesamt haben die Prozesse im “L”-Cluster niedrige Werte, das Sinnkriterium ausgenommen [Zentroid = (2.45, 2.55, 2.27, 3.29)].

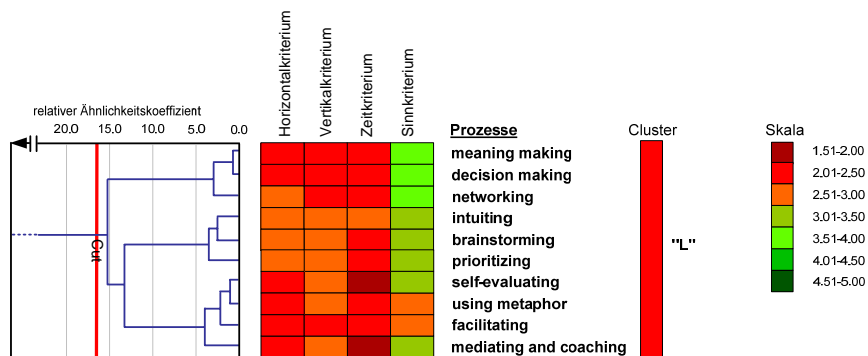


Abbildung 4. Clusterlösung für das „Loser“-Cluster

### 3.2.3 Validität der clusteranalytischen Ergebnisse

Zunächst wird eine einfaktorielle 4-variate Varianzanalyse gerechnet (mit dem Cluster als unabhängige Variable und den Kriteriums-Mittelwerten als abhängige Variablen), um zu überprüfen, ob sich die Cluster insgesamt signifikant unterscheiden (vgl. auch das Vorgehen in Zendler, Spannagel und Klaut, 2008). Bei einem signifikanten Ergebnis werden Post-Hoc-Tests durchgeführt, um die

Unterschiede zwischen den einzelnen Clustern beurteilen zu können. Als Prüfgröße wird jeweils Wilks  $\lambda$  verwendet und in einen F-Wert transformiert.

Die multivariate Varianzanalyse lieferte einen F-Wert von  $F=16.75$ . Der kritische Wert liegt bei  $F_{(20, 117)} < 2.04$  ( $\alpha=.01$ ). Somit unterscheiden sich die sechs Cluster signifikant. Anschließend wurden Post-Hoc-Tests durchgeführt, um die Unterschiede zwischen den einzelnen Clustern zu prüfen. Abbildung 6 zeigt die Ergebnisse der Einzelvergleiche (links) und die kritischen F-Werte bei  $\alpha=.01$  und  $\alpha=.05$ . Alle Einzelvergleiche sind bei  $\alpha=.01$  signifikant. Als Ergebnis kann festgehalten werden, dass sich alle Cluster statistisch sehr signifikant unterscheiden.

	"W2/-V"	"W3/+S"	"I1/-V-Z"	"I2/-H-Z"	"L"
"W1/+H+Z"	10.84** (4; 10)	12.80** (4; 9)	34.92** (4; 8)	225.99** (4; 5)	115.95** (4; 11)
"W2/-V"		8.32** (4; 12)	12.09** (4; 11)	24.16** (4; 8)	62.29** (4; 14)
"W3/+S"			39.13** (4; 10)	10.65** (4; 7)	64.45** (4; 13)
"I1/-V-Z"				21.34** (4; 6)	16.43** (4; 12)
"I2/-H-Z"					18.96** (4; 9)

df	F <sub>krit, .99</sub>	F <sub>krit, .95</sub>
(4; 5)	11.39	5.19
(4; 6)	9.15	4.53
(4; 7)	7.85	4.12
(4; 8)	7.01	3.84
(4; 9)	6.42	3.63
(4; 10)	5.99	3.48
(4; 11)	5.67	3.36
(4; 12)	5.41	3.26
(4; 13)	5.21	3.18
(4; 14)	5.04	3.11

Abbildung 6 . Berechnete und kritische F-Werte für die Einzelvergleiche

### 3.3 Diskussion

Von den 44 untersuchten Prozessen sind 23 zu den "Winner"-Clustern zu zählen. Diese Prozesse haben – im Vergleich mit den restlichen 21 Prozessen – relativ hohe Werte bezüglich der vier Schwillschen Kriterien. D.h., diese Prozesse sind in vielen Bereichen der Mathematik relevant (Horizontalkriterium), sie lassen sich auf verschiedenen intellektuellen Stufen vermitteln (Vertikalkriterium), sie sind längerfristig bedeutsam (Zeitkriterium), und sie haben einen hohen Bezug zu lebensweltlichen Kontexten (Sinnkriterium). Das bedeutet, dass diese Prozesse geeignete Kandidaten für die Förderung in mathematischen Kontexten sind. Da es sich mit 23 Prozessen um eine recht große Anzahl handelt, kann durchaus die Position vertreten werden, dass beim Mathematiklernen zahlreiche Denk- und Arbeitsweisen gefördert werden können.

Als besonders relevant können die Prozesse des "W1/+H+Z"-Clusters betrachtet werden: *deductive reasoning, analyzing, generalizing, problem solving and problem posing, finding cause-and-effect relationships* und *finding relationships*. Dabei handelt es sich zudem um die 6 Prozesse mit den höchsten Gesamtmittelwerten.

Diese Prozesse haben insbesondere hohe Werte im Horizontal- und im Zeitkriterium. Dies bedeutet, dass sie in vielen Bereichen der Mathematik sehr wichtig sind und zudem auch über einen längeren Zeitraum hinweg bedeutsam waren und weiterhin sein werden. Aus diesen Gründen sollten die Prozesse des "W1/+H+Z"-Clusters eine zentrale Rolle beim Mathematiklernen einnehmen.

Die Prozesse im "W2/-V"-Cluster haben ebenfalls eine hohe Relevanz für das Mathematiklernen. Allerdings kann aufgrund der niedrigeren Werte im Vertikalkriterium vermutet werden, dass sie sich im Vergleich schwieriger auf allen Klassenstufen vermitteln lassen.

Die Prozesse im "W3/+S"-Cluster haben hohe Werte im Sinnkriterium. Daraus kann gefolgert werden, dass sich diese Prozesse besonders gut an Alltagskontexten anbinden lassen bzw. auch eine hohe Relevanz für das Alltagsdenken besitzen.

Insgesamt gibt es kaum Prozesse, die niedrige Werte bezüglich des Sinnkriteriums erhalten haben. Daraus kann gefolgert werden, dass es sich tatsächlich um allgemeinbildende Prozesse handelt, die als Ausgangsbasis gewählt wurden.

Die Prozesse im "Loser"-Cluster haben niedrige Werte bezüglich des Horizontal-, der Vertikal- und der Zeitkriteriums. Dies bedeutet, dass diese Prozesse beim Mathematiklernen keine Rolle spielen.

#### 4. Zusammenfassung und Ausblick

Die Ergebnisse der hier beschriebenen Untersuchung lassen den Schluss zu, dass die Prozesse *deductive reasoning*, *analyzing*, *generalizing*, *problem solving and problem posing*, *finding cause-and-effect relationships* und *finding relationships* zentrale Prozesse für das Mathematiklernen sind. Darüber hinaus sind die 17 Prozesse der anderen beiden "W"-Cluster zur Behandlung in mathematischen Kontexten besonders geeignet. Dabei weisen zahlreiche Prozesse der "W"-Cluster hohe Werte im Sinnkriterium auf, so dass auch von einer hohen Alltagsrelevanz ausgegangen werden kann. Somit ist die Voraussetzung für eine der Heymannschen Forderungen gegeben, dass denkfördernder Mathematikunterricht an Alltagsdenken angebunden sein und dieses fortführen sollte.

Die hier ermittelten zentralen Prozesse für das Mathematiklernen können nun mit den Prozessen in Verbindung gebracht werden, die in den Bildungsstandards zur Mathematik aufgeführt sind. Hier sollten Übereinstimmungen und Differenzen ermittelt und analysiert werden. Als Ergebnis dieser Analyse können Prozesse stehen, die beim Mathematiklernen aus *fachwissenschaftlicher* und *fachdidaktischer* Sicht eine wesentliche Rolle spielen. Den fachwissenschaftlichen Beitrag liefert hierzu die vorliegende Studie.

Die Ergebnisse der hier beschriebenen Untersuchung können außerdem zum Vergleich mit Prozessprofilen anderer Disziplinen (z.B. Informatik, Physik, Biologie, Chemie, Germanistik, Fremdsprachen, Philosophie, Geschichte, Musik, Kunst, Sport, Psychologie) herangezogen werden. Dabei handelt es sich um ein umfassendes Forschungsprogramm, das bereits zum Teil in Angriff genommen wurde. Ein Prozessprofil für die Informatik liegt vor (Zendler, Spannagel, & Klautt,

2008), analoge Studien im Kontext anderer Disziplinen sind in Planung. Liegen Prozessprofile verschiedener Wissenschaften vor, so können diese auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede untersucht werden. Findet man Unterschiede, so kann davon ausgegangen werden, dass bestimmte Disziplinen einen besseren Kontext zum Erlernen spezifischer Prozesse bieten als andere Disziplinen. Ebenso gewinnbringend sind Gemeinsamkeiten in Prozessprofilen. Wenn ein Prozess in mehreren Disziplinen eine hohe Relevanz besitzt, so kann dies didaktische Konsequenzen haben: Wird die Durchführung eines Prozesses in einem bestimmten Fach behandelt, so können unter Umständen die erlernten Strategien auf andere Kontexte, d.h. andere Fächer, übertragen werden. Hier ergeben sich Chancen für eine fächerübergreifende Behandlung von Prozessen. Dies würde bedeuten, dass ein und derselbe Prozess in verschiedenen Kontexten (z.B. Mathematik, Informatik und Deutsch) durchgeführt wird und sich so die allgemeine Struktur des Prozesses herausarbeiten lässt.

Will man Kindern und Jugendlichen das Denken lehren, dann muss eine Änderung in der didaktischen Orientierung erfolgen: Bei der Planung von Lehr-Lern-Szenarien muss mehr von den Prozessen und weniger von den Inhalten aus gedacht werden. Gemeinsam mit den Untersuchungen in den anderen Disziplinen kann die vorliegende Studie eine empirische Basis für die prozessorientierte Planung von Lehr-Lern-Szenarien in verschiedenen Kontexten bereit stellen.

## Danksagung

Wir danken Anna Höing und Irene Reeb für die Hilfe bei der Fragebogenaktion und Christine Bescherer für ihre wertvollen inhaltlichen Anregungen. Dank gilt außerdem der LANDESSTIFTUNG Baden-Württemberg für die finanzielle Unterstützung der Forschungsarbeit im Rahmen des Eliteprogramms für Postdoktorandinnen und Postdoktoranden.

## Literatur

- Barell, J. (1995). *Teaching for Thoughtfulness. Classroom Strategies to Enhance Intellectual Development*. White Plains, NY: Longman.
- Bowkett, S. (2006). *100 Ideas for Teaching Thinking Skills*. London, New York: Continuum.
- Brady, M. (2008). Cover the Material – Or Teach Students To Think? *Educational Leadership*, 65(5), 64–67.
- Beutelspacher, A. (2001). „In Mathe war ich immer schlecht...“ (3. Aufl.). Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- Bolhuis, S. (2003). Towards process-oriented teaching for self-directed lifelong learning: a multidimensional perspective. *Learning and Instruction*, 13, 327–347.
- Bunge, M. (1967). *Scientific research I. The search for system*. Berlin: Springer.
- Costa, A. L. & Liebmann, R. M. (Eds.) (1997a). *Envisioning process as content. Toward a renaissance curriculum*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

- Costa, A. L. & Liebmann, R. M. (Eds.) (1997b). *The process-centered school. Sustaining a renaissance community*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
- Costa, A. L. & Liebmann, R. M. (Eds.) (1997c). *Supporting the spirit of learning. When process is content*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
- Crawford, A., Saul, W., Mathews, S. R., & Makinster, J. (2005). *Teaching and Learning Strategies for the Thinking Classroom*. New York: The International Debate Education Association.
- Grinstein, G., Trutschl, M., & Cvek, U. (2001). High-Dimensional Visualizations. In *Data mining conference KDD workshop 2001* (pp. 7–19). New York: ACM Press.
- Harden, R. M. & Stamper, N. (1999). What is a spiral curriculum? *Medical Teacher*, 21 (2), 141–143.
- Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim, Basel: Beltz.
- Hubert, L. J. & Levin, J. R. (1976). A general statistical framework for assessing categorical clustering in free recall. *Psychological Bulletin*, 83, 1072–1080.
- KMK – Kultusministerkonferenz (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Abrufbar unter: [http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik\\_MSA\\_BS\\_04-12-2003.pdf](http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf) (Stand: 23.8.2008).
- KMK – Kultusministerkonferenz (2004a). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Abrufbar unter: [http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Grundschule\\_Mathematik\\_BS\\_307KMK.pdf](http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Grundschule_Mathematik_BS_307KMK.pdf) (Stand: 23.8.2008).
- KMK – Kultusministerkonferenz (2004b). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Abrufbar unter: [http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Hauptschule\\_Mathematik\\_BS\\_307KMK.pdf](http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Hauptschule_Mathematik_BS_307KMK.pdf) (Stand: 23.8.2008).
- Mandl, H. & Friedrich, H. F. (Hrsg.) (1992). *Lern- und Denkstrategien. Analyse und Interventionen*. Göttingen: Hogrefe.
- NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- OECD – Organisation for Economic Co-operation and Development (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills. A New Framework for Assessment*. Paris: OECD.
- Parker, J. C. & Rubin, L. J. (1966). *Process as content. Curriculum Design and the application of knowledge*. Chicago: Rand McNally & Company.
- Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 25(1), 20–31.
- Schwill, A. (1994). Fundamental ideas of computer science. *EATCS Bulletin* 53, 274–295.

- Ward, J. H. (1963). Hierarchical groupings to optimize an objective function. *Journal of the American Statistical Association*, 58, 236–244.
- Zendler, A., Spannagel, C., & Klautt, D. (2008). Process as content in computer science education: empirical determination of central processes. *Computer Science Education (accepted)*.