Fachdidaktische Beiträge

Größen im Mathematikunterricht

Prof. Siegfried Krauter

Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

Inhaltsverzeichnis:

1. Was ist eine Größe?

Welche der folgenden 12 Angaben sind „Größen“?

15 DM	7 m	13.15 Uhr	3 Kelvingrade	163 m ü.NN.	+17
15°C	3,1415..	6 h 27 min	29 l	2/3	$\sqrt{3}$

Ein erster Blick könnte dazu verführen, alle Angaben mit Einheiten, also die „benannten Zahlen“ als Größen zu betrachten und alle anderen nicht. Das ist jedoch zu einfach und falsch. Wir müssen deshalb etwas sorgfältiger überlegen, was Kennzeichen von Größen sind. Wir tun dies, indem wir überlegen, was man mit Größen tun kann und was nicht.

Sinnvollerweise möchte man zwei Größen derselben Art miteinander **vergleichen** können und zwar so, dass man eindeutig bestimmen kann ob sie gleich, oder ob die eine größer oder kleiner ist als die andere. Welche Angaben in der obigen Sammlung erfüllen dieses Kriterium und welche nicht? Revidieren Sie Ihre Vorstellung daraufhin. Wir sollten also zunächst alle Angaben zulassen, die diese Forderung erfüllen. Dabei scheidet aber keines unserer angegebenen Beispiele aus.

Eine zweite sinnvolle Forderung an Größen ein und derselben Art ist die, dass man zwei Größen **addieren** kann und wieder eine Größe derselben Art erhält. Welche Angaben in der obigen Sammlung erfüllen dieses Kriterium und welche nicht? Revidieren Sie Ihre Vorstellung erneut. Warum fallen die Angaben 13.15 Uhr, 163 m ü. NN und 15°C auf Grund dieses Kriteriums heraus?

Wir können – ähnlich wie bei den Zahlen – keine explizite Definition geben, sondern nur eine implizite und wollen deshalb den Begriff der Größe axiomatisch fassen. Wir können nur sagen: „wenn man das und das mit ihnen tun kann, dann sprechen wir von Zahlen“. Analog definieren wir den Begriff der Größen.

2. Was kann man mit Größen tun?

2.1 *Man kann Größen eines Bereichs miteinander **vergleichen**:*

Vorsicht: es handelt sich nicht um einen bloßen Maßzahlvergleich:

7 kg < 9 h ist blanker Unsinn; aber 3 dm < 2 m, obwohl 3 > 2.

2.2 *Man kann Größen ein und desselben Bereichs miteinander **addieren**:*

Vorsicht: es handelt sich nicht um eine bloße Maßzahladdition:

7 kg + 9 h = 16 kgh ist blanker Unsinn;

3 ... + 12 ... = 192 ...

Ergänzen Sie diese Gleichung mit passenden Einheiten, so dass sie stimmt!

Die Addition kann auch umgekehrt werden, sofern Minuend > Subtrahend ist.

2.3 *Man kann Größen **vervielfachen** (mit natürlichen Zahlen oder mit Bruchzahlen):*

$n * g = g + g + g + ... + g$ (n gleiche Summanden g). Abbildung von $N \times G$ in G.

Die Vervielfachung kann auf die Addition zurückgeführt werden und ist eigentlich zunächst keine eigenständige Verknüpfung von Größen, sondern nur eine verkürzte Schreibweise.

Diese **Vervielfachung hat zwei Umkehrungen**, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: 3 * 5 cm = 15 cm.

a) **15 cm : 3 = 5 cm**.
Wir teilen 15 cm in drei gleichlange Teile. Wie lang ist ein Teil?
Oder: Wir verteilen 15 cm an drei Leute. Wie viel bekommt jeder?
Diese Umkehrung nennt man **Teilen** oder **Verteilen**.
Das Ergebnis einer solchen Aufgabe ist eine Größe.

b) **15 cm : 5 cm = 3**.
Wir schneiden von einem Stück von 15 cm Länge einzelne Stücke zu je 5 cm ab. Wie viele Stücke erhalten wir?
Oder: Wir messen 15 cm mit 5cm aus? Wie oft passt es hinein?
Diese Umkehrung nennt man **Aufteilen** oder **Messen**.
Das Ergebnis einer solchen Aufgabe ist eine reine Zahl.

2.4 *Die wichtigsten Größenbereiche in der Schule:*

Natürliche Zahlen, positive Bruchzahlen, positive reelle Zahlen, Geldwerte, Zeitdauern, Längen; Gewichte (Massen), Rauminhalte, Flächeninhalte.

Bereits in Klasse 1 werden Geldwerte und Längen eingeführt.
Ab Klasse 2 werden Zeitdauern behandelt. Die restlichen drei Größen werden ab Klasse 3 behandelt. Sinnvoll wäre die etwa gleichzeitige Behandlung von Gewicht und Volumen (warum gerade diese beiden?) in Klasse 3 und die Flächeninhalte als schwierigster Größenbegriff (warum?) erst in Klasse 4.

Wir halten abschließend noch einmal fest:

Größen sind nicht dadurch gekennzeichnet, dass sie *Zahlenangaben mit Einheiten* sind, sondern durch obige Forderungen charakterisiert, die wir im Folgenden noch präzisieren wollen. Deshalb sind z. B. auch die natürlichen Zahlen oder die positiven Bruchzahlen oder die positiven reellen Zahlen Größen.

3. Mathematische Beschreibung eines Größenbereiches (G, + , <)

Durch folgende Axiome wird die **Struktur eines Größenbereichs** axiomatisch festgelegt:

GI: (G, <) ist eine strenge Ordnungsstruktur mit Trichotomieeigenschaft: d. h. :

a) Die Relation $<$ ist transitiv und irreflexiv

b) Für zwei Größen $a, b \in G$ gilt stets genau eine der drei Gleichungen:

(i) $a < b$ (ii) $b < a$ (iii) $a = b$

GII: (G, +) ist ein assoziatives und kommutatives Verknüpfungsgebilde (d. h. eine komm. Halbgruppe):

a) Für alle a, b, c $\in$ G gilt: (a + b) + c = a + (b + c); Assoziativgesetz

b) Für alle a, b $\in$ G gilt: a + b = b + a; Kommutativgesetz

GIII: Die Gleichung a + x = b mit a, b $\in$ G besitzt genau dann eine Lösung x in G, wenn a < b gilt. (Lösbarkeitsaxiom).

Zusätze: Manche Größenbereiche besitzen darüber hinaus bestimmte zusätzliche Eigenschaften. Die wichtigsten davon sind folgende:

Teilbarkeitseigenschaft (TB):

Zu beliebigen a $\in$ G und n $\in$ N gibt es stets x $\in$ G mit n * x = a.

Dies ist die Eigenschaft der Teilbarkeit (Jede Größe a$\in$G lässt sich stets in n gleiche Teile teilen). Welche der genannten Größenbereiche besitzen diese Eigenschaft, welche nicht?

Kommensurabilitätseigenschaft (Komm):

Zu beliebigen a, b $\in$ G gibt es stets p, q $\in$ N mit p * a = q * b.

Dies ist die Eigenschaft der Kommensurabilität: Je zwei Größen a und b $\in$ G haben ein rationales Verhältnis a : b = q : p, bzw. jede Größe aus G lässt sich durch jede andere mit rationaler Maßzahl ausdrücken: a = $\frac{q}{p}$ * b bzw. b = $\frac{p}{q}$ * a.

Diese beiden Zusatzeigenschaften sind wichtig für die Begründung der Bruchrechnung:

a) Hat ein Größenbereich (GB) die Eigenschaft **TB**, so kann man in ihm jede Bruchzahl realisieren: Man wählt irgendeine Größe als Einheit. Diese lässt sich wegen TB in eine beliebige Anzahl von gleichen Teilen unterteilen. Durch Vervielfachen kommt man zu beliebigen Brüchen. Man kann also in einem solchen GB konkrete Bruchrechnung betreiben. Man kann also alle Bruchzahlen erzeugen.
Warum hat z. B. der Bereich der Geldwerte nicht die Eigenschaft TB?

b) Hat ein GB die Eigenschaft **Komm**, so kann man jedes seiner Elemente darstellen als rationales Vielfaches jedes beliebigen anderen. Man kann dann jede Größe des Bereichs mit rationaler Maßzahl beschreiben, man kommt also allein mit Brüchen als Maßzahlen aus. Warum hat z. B. der Bereich der Längen nicht die Eigenschaft Komm? Denken Sie an die Längen von Seite und Diagonale in einem Quadrat.

c) Hat ein Größenbereich ***beide*** dieser Eigenschaften, so ist er ein geeignetes Modell zur Konkretisierung von Bruchzahlen, denn erstens kommen in ihm alle Bruchzahlen als Maßzahlen vor und zweitens kommt man mit diesen aus, d. h. es kommen keine anderen Maßzahlen als Bruchzahlen vor. Der Bereich ist daher ein geeignetes Modell für konkrete Bruchrechnung.

Der Bereich der Längen hat zwar die Eigenschaft TB, jedoch nicht Komm.

Der Bereich der natürlichen Zahlen hat zwar die Eigenschaft Komm, jedoch nicht TB.

Zusatzbemerkung:

Nicht alles was eine „Einheit" neben einer Zahl hat ist eine Größe.

Umgekehrt muss eine Größe nicht unbedingt eine Zahl mit Einheit sein.

Auch (N, +, <) ist ein Größenbereich! Prüfen Sie die Axiome GI bis GIII.

Ebenso bilden die positiven Bruchzahlen einen solchen (mit TB und Komm).

4. Unterscheidung zwischen Repräsentanten und Größen

Wir zeigen die Notwendigkeit der Unterscheidung zwischen Repräsentant und Größe an einfachen Beispielen:

a) Gegeben sind die gleichlangen aber verschiedenen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

Wir betrachten einen Punkt P auf der Strecke $\overline{AB}$.

Offensichtlich gilt zwar $P \in \overline{AB}$, aber andererseits $P \notin \overline{CD}$.

Daraus schließen wir, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ - obwohl zwar gleich lang! – als Punktmengen (Strecken) voneinander verschieden sind. Die beiden Strecken sind Träger (Repräsentanten) einer Eigenschaft *Länge* und nur diese Eigenschaft ist bei beiden gleich. Man nennt die Strecken Repräsentanten der Länge $|\overline{AB}|$. Genau genommen muss man also zwischen einer Strecke $\overline{AB}$ als Repräsentant und ihrer Länge $|\overline{AB}|$ als Größe unterscheiden.

Zwar ist $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ **(Längen sind gleich),**

aber es ist $\overline{AB} \neq \overline{CD}$ **(Strecken sind nicht gleich).**

b) Ein und derselbe Repräsentant kann Träger sehr verschiedener Größen sein (eine Person etwa von: Haarfarbe; Körpergröße d. h. Länge; Körpergewicht; Körpervolumen; u. v. a. m.).

Wir zeigen dies an einem zweiten Beispiel:

In der Schule sollen die beiden folgenden Aufgaben bearbeitet werden:

Was wird ein Schüler als Ergebnis hinschreiben?

Geben sie mindestens 5 verschiedene denkbare Schülerlösungen an und interpretieren Sie diese im Sinne der vorgenannten Vorstellungen!

Welche Größen könnte die Figur (der Repräsentant Kästchen bzw. Winkelhaken) repräsentieren? Anzahl, Flächeninhalt, Länge (Umfang), Winkelgröße etc.

Operatoren wirken stets auf Größen, nie auf Repräsentanten!

c) Ein Drittes Beispiel mag die Wichtigkeit der – zumindest im Kopf des Lehrers – notwendigen Unterscheidung zwischen Größe und Repräsentant deutlich machen:

Bei der Aufforderung „Zeichnen Sie ein Rechteck“ wird man in aller Regel die erste der beiden obigen Figuren geliefert bekommen. Was ist der Unterschied zwischen beiden Figuren? Hat die erste Figur denn überhaupt einen Flächeninhalt, wenn die Punkte im Inneren offensichtlich gar nicht zur Figur gehören? Gehört das Innere zur Figur „Rechteck“ oder nicht? Und warum zeichnen wir es dann nicht?

U. a. macht genau diese Problematik den Begriff des Flächeninhalts und seine Unterscheidung vom Umfang so schwer! (siehe auch unter Punkt 9.).

5. Größen und Repräsentanten. Eine Übersicht

Größe	**Repräsentanten**	**Einheiten**	**Messgerät**	**Messprozess**
Länge	Strecken	mm, cm, dm, m, km	Meterstab, Maßband	Anlegen
Flächeninhalt	Flächenstücke	mm^2, cm^2, dm^2, m^2 a, ha, km^2	Messquadrate, Rasterfolien	Überdecken mit Messquadraten
Rauminhalt	Körper, Hohlkörper	mm^3, cm^3 = ml, dm^3 = l, hl, m^3	Messwürfel	Ausfüllen mit Messwürfeln
Gewicht	Körper	mg, g, kg, t	Waage	Austarieren mit Wägestücken
Zeitdauer	Vorgänge	s, min, h, d, w, a	Uhr, Metronom, Puls, Zählen etc.	Ausmessen mit Normvorgängen.
Geldwert	Wertsachen	Cent, Euro, $, ..	Vergleichswährung	Einschätzen

6. Allgemeines zur Behandlung der Größenbereiche

Mathematik ist mehr als Rechnen!

Mathematik ist die Kunst Rechnungen zu umgehen!

Nach meinem Eindruck werden in der Schule viel zu sehr die **formalen Fertigkeiten (Regelverhalten)** bevorzugt und betont. Die mehr **informellen Fertigkeiten** und Kenntnisse wie Schätzen, naive, informelle, nichtnormierte, heuristische, probierende Vorgehensweisen kommen - völlig zu unrecht - absolut zu kurz.

Unsere Schüler verlassen die Schule manchmal als gut trainierte Rechenknechte (auch das nur noch selten), aber als Analphabeten in Bezug auf ein **ausgeprägtes Zahlen- und Größengefühl**. Ein solches auszubilden ist aber eines der wichtigsten Ziele der Schule und dort vor allem des Mathematikunterrichts.

Muss es denn immer so furchtbar exakt sein? Genügt nicht oft genau so gut ein grober Näherungswert anstelle des genauen Ergebnisses? Warum darf nicht probiert werden, sondern muss der wohltrainierte Algorithmus verwendet werden?
Das entspricht nicht den Verhaltensweisen im Alltagsleben.

Ist es nicht so, dass wir oft einer Schülerhaltung begegnen, die in folgendem bösen Bonmot zusammengefasst werden könnte:

„Ich weiß zwar nicht was ich rechne, aber dafür rechne ich es unheimlich genau!“

Z. B TR-Ergebnisse werden kritiklos akzeptiert und wenn sie noch so unsinnig sind!

Vor dem rechnerischen Umgang mit Größen müssen die Schüler einen Begriff und eine Vorstellung davon haben, was eine Größe ist.

Eine kleine selbst erlebte Episode mag erhellen, in welch unkundigem Zustand sich unsere Schüler bezüglich des Größenverständnisses befinden: Meine kleine Tochter sagte, als ich im Badezimmer gerade von der Waage stieg:

„Papa, wie groß bist du? Ich bin schon drei!“.

Was unterscheidet diese Unreife von der eines Schülers, der auf die Frage nach dem Flächeninhalt eines Kreises die Antwort „6 cm“ gibt?

Eine der wichtigsten Tätigkeiten zum Verständnis eines Größenbegriffs sind **Messprozesse**. Haben Sie schon einmal Flächengrößen ausgemessen, wirklich ausgemessen, nicht berechnet? Was wäre ein geeignetes Messgerät? Was müsste man tun? Mit konkreten Messprozessen lernen die Schüler Größenbegriffe kennen: „Das was ich mit dem Metermaß messe sind Längen, das was ich mit der Waage messe sind Gewichte (Massen), das was ich mit der Stoppuhr messe sind Zeitdauern, das was ich mit dem Literbecher messe sind Volumina, das was ich mit dem Quadratraster messe sind Flächeninhalte etc.“.

Die Schüler müssen z. B. den Unterschied kennen: Rechteck ≠ Umfang ≠ Inhalt.

Umfang = Länge der Randlinie

Inhalt = Größe (Platz) des Flächenstücks

Sinnvolles Schätzen, überschlägiges Bestimmen (großzügig) evtl. durch gedankliches Ausmessen, Vergleichen mit Bekanntem (man muss einiges wissen um Schätzen zu können!) sind wichtige Aktivitäten und Kompetenzen, die im Mathematikunterricht der Schule gelehrt und gelernt werden müssen:

Beispiele:

Schätzen Sie das Volumen einer erwachsenen Person, den Rauminhalt einer Badewanne, das Gewicht (Masse) eines Autos, die Größe (Grundfläche und auch Volumen) eines Zimmers, die Flächengröße einer Wohnung, eines Fußballplatzes, der BR Deutschland, den Flächeninhalt eines Blattes DIN-A4 , den eines Schreibtisches u. v. a. m.

Das Wichtigste ist der allmähliche Auf- und Ausbau eines **Systems von Standardrepräsentanten** für jeden Größenbereich durch spiralige Behandlung:

Wir geben ein denkbares **Beispiel für den Bereich der Gewichte (Massen):**

Zuerst wird man nur den kg-Bereich behandeln und sich einprägen und dann allmählich nach beiden Seiten ausbauen.

...	100 t	10 t	1 t	100 kg	10 kg	**1 kg**	100 g	10 g	1 g	...
Evtl. weiter	Lokomotive	LKW	PKW	Mann	Kleiner Eimer mit Wasser	**Zuckerpacket, volle Literflasche**	Schokoladetafel	Standardbrief	Centmünze	Evtl. weiter

Stellen Sie analoge Übersichten für die anderen Größenbereiche auf.

Wie sieht das im Bereich der Zeitdauern aus?

Wenn man die Tabelle aufsteigend von rechts nach links anordnet, erhält man eine Stellenwerttafel für den betreffenden Größenbereich! (falls Einheitensystem dezimal!).

7. Messgeräte und Messverfahren für einige Größen

Gewicht: Tafelwaage mit Wägestücken (Standardrepräsentanten!); Feinwaage (Chemie), Briefwaage, Küchenwaage, Dezimalwaage, Personenwaage, Brückenwaage.

Rauminhalt:
a) Umfüllen, Eintauchen, Ausmessen mit Messbecher oder Messzylinder.
b) Auslegen oder Nachbauen mit Messwürfeln. Wie wird z. B. das Volumen eines Auto-Kofferraumes gemessen?

Zusatz: *Warum ist der Gebrauch eines „Messbechers“ beim Kochen oder Backen didaktisch außerordentlich kontraproduktiv? Warum kann das Abmessen von 100 g Zucker mit diesem Gerät zur Verwirrung bezüglich der Größenbegriffe führen?*

Flächeninhalt:	Auslegen oder Überdecken mit Messquadraten. Hervorragende Flächenmessgeräte sind Rasterfolien. Man führe Messungen durch an Briefmarken, Notizzetteln, Papierblättern, Postkarten, Schreibtischen, Fensterflächen, etc.
Länge:	Lineal, Zollstock, Meterstab, Maßband, Messstange, etc.
Zeitdauer:	Zählen, Pulsschlag, Sanduhr, Metronom, Sonnenlauf, Mondlauf, Uhren aller Art. Welche Normvorgänge werden bei verschiedenen Sorten von Uhren als Vergleichsgrößen realisiert? Sanduhr, Pendeluhr, Taschenuhr, Quarzuhr, Atomuhr, ...

8. Methodische Stufenfolge bei der Einführung von Größen

Vor dem rechnerischen Umgang mit Größen müssen die Schüler einen Begriff und eine Vorstellung davon haben, was eine Größe ist.

Folgende Stufenfolge (mit Varianten) wird in der Didaktik empfohlen. Wir wählen im Folgenden den Größenbereich der Gewichte zur Illustration.

Stufe 1: Sammeln von spielerischen Erfahrungen in Sachsituationen durch **direkten, d. h. unmittelbaren Vergleich von Repräsentanten**:
Man vergleicht z. B. Körper nach ihrem Gewicht durch Abschätzen in der Hand, indem man sie an die beiden Seiten einer „Waage“ (Kleiderbügel, Hebel, etc.) hängt.
Ziel: Gleichheitsbegriff; Ordnungsrelation schwerer – leichter.
Wie sieht diese Stufe bei anderen Größen aus?

Stufe 2: **Mittelbarer Vergleich** unter Verwendung beliebiger willkürlicher Maßeinheiten:
Schokoladetafel ist leichter als Milchflasche, Milchflasche leichter als Wassereimer, also ....:
Wichtig ist hierbei das Entdecken der Transitivität der Ordnung. Außerdem ist es sinnvoll, bereits hier bevorzugt künftige Standardrepräsentanten zum Vergleichen und Ausmessen heranzuziehen (spiraliges Lernen).

Stufe 3: **Vergleichen und Ausmessen mit Normrepräsentanten.**
Einführung der Standardeinheiten.
Erste Schritte zum Aufbau des betreffenden Einheitensystems:
Wägstücke einer Tafelwaage: 1 kg, 100g, 10g, 1g.
Nutzung standardisierter Messverfahren.

Stufe 4: **Ausbau des Einheitensystems**.
Aufbau eines Systems von Standardrepräsentanten über einen möglichst großen Wirklichkeitsbereich. Vgl. die Tabelle oben in Abschnitt 6.

Stufe 5: **Rechnen mit Größen des Bereichs:**
Addieren, Vervielfachen, Umwandeln zwischen verschiedenen Einheiten.

Bitte beachten Sie: ***Das Rechnen mit Größen steht nicht am Anfang der Befassung, sondern am Ende. Es gibt Vieles vorher zu tun, um einen Größenbegriff zu behandeln. Das Rechnen ist nur noch ein Zusatz und keineswegs der Wichtigste!***

Hinweis:

Der rechnerische Umgang mit Größen macht nur einen Bruchteil dessen aus, was Schüler im Mathematikunterricht über Größen lernen sollten. Mathematik ist mehr als Rechnen. Der Aufbau eines vernünftigen Zahlen- und Größengefühls leistet mehr zur Heranbildung mündiger Bürger, als sturer und blinder Rechendrill ohne konkrete Vorstellungen und Bezüge zur Wirklichkeit.

9. Ziele des Sachrechnens bzw. des Arbeitens mit Größen

- ***Aufbau eines gesicherten Größenbegriffs (was ist Gewicht, was Rauminhalt?).***
- ***Aufbau geeigneter Vorstellungen für einzelne Größen (System von Standardrepräsentanten).***
- ***Fähigkeit zum Umwandeln einer Größe in verschiedene ihrer Einheiten. Überblick über das jeweilige Einheitensystem.***
- ***Rechnen mit Größen. Erfahrungen im Umgang mit Größen beim Sachrechnen.***

Eine geeignete Maßnahme zur Verwirklichung dieser Ziele im Sachrechnen wäre z. B. folgende Methode:

Bevor irgendeine Aufgabe zum Sachrechnen angegangen wird, wird eine **vernünftige Schätzung** abgegeben: *Was muss denn etwa rauskommen?*

Das fördert die Entwicklung und den Aufbau eines Zahlen- und Größengefühls ungemein und schult das Vermögen zum Schätzen. Da Schätzen immer ein „Vergleichen mit Bekanntem“ ist, beruht die Fähigkeit zum Schätzen notwendigerweise auf dem Aufbau eines geeigneten Systems von Vergleichsgrößen, den „Standardrepräsentanten“. Außerdem schafft Schätzen Wirklichkeitsbezug für die Mathematik. „Wenn ich den Preis für 1 kg Rindfleisch ausrechnen soll, muss etwas in der Größenordnung von 10 bis 20 € herauskommen.“ Man hat damit eine gute Plausibilitätskontrolle für grobe Rechenfehler.

10. Besondere Schwierigkeiten beim Größenbegriff Flächeninhalt

Warum ist der Größenbegriff der Flächeninhalte für Schüler mit ganz besonderen Schwierigkeiten verbunden? Wir nennen vier wesentliche Gründe dafür:

1. Im Gegensatz zu fast allen anderen Größen haben Schüler i. Allg. ***keinerlei Vorerfahrungen im Umgang mit Flächengrößen aus dem täglichen Leben*** (Ausnahmen: Kinder aus Bauernfamilien).

2. ***Flächeninhalte werden fast nie gemessen***, sondern meistens berechnet (dabei werden Längen gemessen; denken Sie an den Messbecher!). Deshalb ist der Begriff der Größe Flächeninhalt wenig ausgebildet.
3. Flächenstücke werden im Mathematikunterricht - auch in Lehrbüchern - fast immer nur als ***Linienfiguren und nicht*** wirklich als ***Flächenstücke*** präsentiert. Das verleitet zur Verwechslung mit dem Umfang. Es fehlt an der nötigen Grundlegung.
4. ***Fehlende sprachliche Unterscheidung zwischen Figur und Größe***:
   Bei vielen anderen Größen wird sprachlich zwischen Repräsentant und Größe unterschieden:
   - Eine *Strecke* hat eine gewisse *Länge*.
   - Ein *Körper* hat einen gewissen *Rauminhalt*.
   - Ein *Vorgang* dauert eine gewisse *Zeitspanne*.

   Anders ist dies bei Flächenstücken: Wir verwenden den Begriff „Fläche" sowohl für die Figur (also den Repräsentanten Flächenstück) als auch für seine Größeneigenschaft „Flächeninhalt".

   Beispiel: Wie groß ist die Fläche des Rechtecks?

   Sorgfältig müsste man fragen:
   "Wie groß ist der Flächeninhalt der Rechtecksfläche?"

   „Die Rechtecksfläche hat einen Flächeninhalt von 15 cm²."

   Stattdessen sagt man schlampig und verwirrend, aber einfach:

   „Die Rechtecksfläche beträgt 15 cm²."

   Man kann als Lehrerin oder Lehrer in Kenntnis dessen geeignete Maßnahmen ergreifen, um diese Defizite zu verringern bzw. auszugleichen und entsprechende Fehler zu vermeiden. Welche Maßnahmen würden Sie ergreifen?

11. Literaturhinweise

Bigalke H.G./Hasemann K.;	Zur Didaktik der Mathematik in den Klassen 5 und 6. Band1. Kap. 7. Frankfurt 1977.
Griesel H.;	Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten Bd. 2. Schroedel 1973.
Kirsch A.;	Elementare Zahlen- und Größenbereiche. Göttingen 1970. Insbes. Abschn. B.
Krauter S. u.a.	Mathematik 5. Ausgabe B. Hauptschule. Lehrerband. Offenburg 1985.
Radatz H./Schipper W.;	Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Schroedel 1983. Kap. 2.6.

12. Aufgaben

1. Erstellen Sie Übersichten für geeignete Systeme von Standardrepräsentanten für jeden der sechs grundlegenden Größenbereiche.

2. Geben Sie für jeden der 6 genannten Größenbereiche wichtige Aktivitätsformen für Schüler zu den in Abschnitt 8 dargestellten methodischen Stufen an.

3. Welche Aufgaben- und Aktivitätsformen sind zur Diskrimination von nahen Größenpaaren (Volumen - Gewicht; Umfang - Inhalt; Oberfläche - Rauminhalt) wichtig, hilfreich und notwendig?
   Geben Sie für jedes Beispiel konkrete Aktivitäten bzw. geeignete Aufgaben an.

4. Stellen Sie ein Programm zur Behandlung der Größe „Flächeninhalt" nach dem Spiralprinzip von Klasse 5 bis Klasse 9 auf.

5. Arbeiten Sie die angegebene Literatur durch. Bewerten und vergleichen Sie.

6. Gibt es auch zusammengesetzte Größen? Kann man kg mit h multiplizieren?
   Denken Sie an die Fallbeschleunigung: $9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9{,}81\ \frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}}$.
   d. h. die Geschwindigkeit erhöht sich beim freien Fall um 9,81 m/s in jeder Sekunde.

7. Was ist grundfalsch an folgendem „Umrechnungsschema" für Schüler:

   1 m $\xrightarrow{\cdot 10}$ 10 dm $\xrightarrow{\cdot 10}$ 100 cm $\xrightarrow{\cdot 10}$ 1000 mm
   Die „Umrechnungszahl" für Längenmaße ist 10.

   Warum sind solche Darstellungen eine echte Katastrophe und stiften nur Verwirrung?

   So bitte nicht!

8. Was misst man beim Einsatz eines „Messbechers" im Haushalt? Ist es korrekt, wenn an den Skalen z. B. „100 g Zucker" steht? Wie kann man Schülern den Unterschied zwischen Volumen und Masse (Gewicht) klar machen?
   Warum ist die Gleichung „ 1 Liter = 1 Kilogramm" grundfalsch, obwohl doch 1 Liter Wasser 1 kg wiegt?

13. Aspekte für die Behandlung der Größen im Mathematikunterricht

1. Hauptaufgabe des Mathematikunterrichts bei der Behandlung der Größen ist die Ausbildung eines gesicherten Begriffs über die jeweilige Größenart, eine Übersicht über die wichtigsten (nicht alle!) Einheiten für die betreffende Größenart und der Aufbau konkreter Vorstellungen zu Größenangaben mit Hilfe eines geeigneten Systems von Standardrepräsentanten.

2. Der Messprozess ist das bedeutsamste Mittel zur Grundlegung eines sicheren Größenbegriffs. Schüler erfahren dabei, was eigentlich mit Gewicht, Rauminhalt, Flächeninhalt, ... gemeint ist. Sie werden mit den wichtigsten Einheiten und Messverfahren (Messgeräten) vertraut und bauen in natürlicher Weise ein System von Standardrepräsentanten auf.

3. Gerade bei den Größen, die üblicherweise nicht gemessen, sondern berechnet werden (sogenannte "abgeleitete" Größen wie Rauminhalt oder Flächeninhalt) müssen Schüler zur Bildung gesicherter Begriffe ausreichende Erfahrungen im Messen sammeln können. Von außerhalb der Schule bringen sie diese nicht mit - ganz im Gegensatz etwa zu den Größenarten wie Zeit oder Geldwert. Besonders problematisch: Flächeninhalte.

4. Sinnvolles Schätzen einer Größe setzt die Verfügbarkeit über ein geeignetes System von Standardrepräsentanten voraus, denn Schätzen heißt „Vergleichen mit Bekanntem“, in Bezug setzen, Eingrenzen. So bedingen und fördern sich diese beiden Aktivitäten gegenseitig (Bsp.: Flächeninhalt eines DIN-A4-Blattes; Volumen des Dozenten; etc.).

5. Überschlägiges Bestimmen (sehr großzügig) von Größenangaben kann (und wird häufig) durch gedanklich nachvollzogene Messprozesse ersetzt bzw. unterstützt werden. (Bsp.: Fläche einer Schreibtischplatte, Inhalt einer Badewanne, Volumen eines Erwachsenen, Höhe eines Hochhauses, ...)

7. Schüler müssen Langzeiterfahrungen mit Standardrepräsentanten machen können. Ins Klassenzimmer gehört eine entsprechende Sammlung von Material:

Wägestücke/Gegenstände:	1 g	10 g	100 g	1 kg	10 kg ...
Körper oder Gefäße:	1 cm^3	10 cm^3	100 cm^3	1 dm^3	10 dm^3 ...
Flächenstücke (Wandplakat):	1 cm^2	10 cm^2	1 dm^2	10 dm^2	1 m^2 ...

8. Die Kenntnisse über Größen müssen bei den Schülern laufend (re-)aktiviert werden z. B. durch klärende Vorfragen bei Sachaufgaben:

   - Was will man wissen?
   - Kann man das direkt messen (Messgerät? Einheit? Schätzung der Größe!) oder muss man es berechnen?
   - Aus welchen anderen Größen kann man es berechnen?
   - Wie kommt man zu diesen Größen (Messen? Berechnen? Vorgabe?)?

   Anregung hierzu: Thema des Monats z. B. "Flächeninhalt" wählen.

9. Mathematikunterricht ist mehr als Rechnen:

   "Ich weiß zwar nicht was ich rechne, aber dafür rechne ich unheimlich genau!"

   Begriffsbildung statt blinder Umrechnungsakrobatik!

   Konkrete Standardrepräsentanten statt Umrechnungszahlen!

   Messprozesse statt Berechnungsverfahren, ggf. nur gedanklich!

   Strategien statt Formeln!

10. Wir wollen im Mathematikunterricht nicht Taschenrechner nachbilden (die erhält man im Kaufhaus äußerst billig), sondern Menschen bilden, die ihrer Umwelt angemessen und verständig gegenübertreten können. **Verständiges Umgehen mit Größen ist in dieser Hinsicht eines der wertvollsten Bildungsziele des Mathematikunterrichts.**