Fachdidaktische Beiträge

Prozentrechnung

Prof. Siegfried Krauter

Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

Inhaltsverzeichnis

Prozentrechnung in der Schule

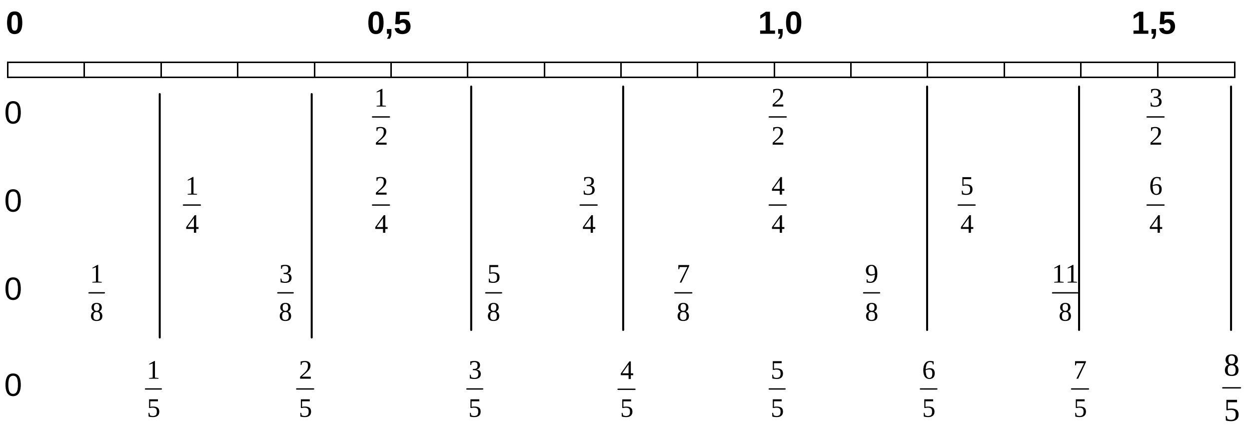
Motto: "50% kapiert ist halb kapiert!"

Im Folgenden soll dargestellt werden, wie ein problemorientierter und anschaulicher Weg zur Prozentrechnung in der Schule begangen werden könnte und welche Aspekte, Zielvorstellungen und Methoden dabei hilfreich sein könnten.

Die Prozentrechnung ist eigentlich nichts anderes als „***Bruchrechnung in dezimaler Form***“ (genauer in „***Hundertstelform***“). Während gewöhnliche Brüche oder Brüche in dezimaler Form hauptsächlich als Maßzahlen für Größen, zur Beschreibung von Anteilen und zur Angabe relativer Vergleiche benutzt werden, kommen Prozentsätze in der Regel nur zur Angabe von relativen Vergleichen und von Anteilen (z. B. Wahrscheinlichkeiten) vor, nie jedoch als Maßzahlen für Größen.

1. Vorbereitende Lernschritte: Bruchform und Dezimalform

Die Schüler müssen tragende Vorstellungen über die Größe von Dezimalzahlen und Brüchen und deren Äquivalenz entwickeln, am besten durch Darstellung an einer linearen Skala (Zahlenstrahl). Dabei wird jeweils den einfachen Brüchen (Halbe, Viertel, Achtel; Fünftel, Zehntel; *evtl. auch noch Zwanzigstel*, *Fünfundzwanzigstel*) die zugehörige dezimale Form gegenübergestellt:

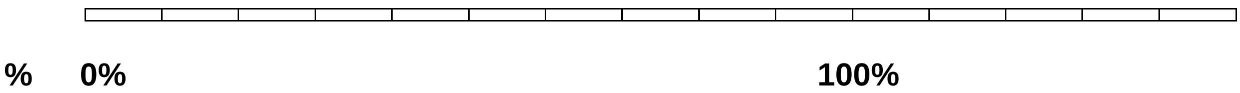


Usf.

Die Schüler sollen in regelmäßigen Übungen spätestens ab Klasse 7 mit diesen Beziehungen (einfache Brüche in Dezimalform umwandeln u. u.) vertraut werden. Bereits in dieser Phase kann der Prozentbegriff in einfachster Form als ein Synonym für Hundertstel verwendet werden: 13 % = $\frac{13}{100}$ = 0,13. $\frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\% = 0{,}40$

2. Grafischer Zugang zum Grundschema der Prozentrechnung

Zunächst zeichnen wir eine Skala mit der Einheitsstrecke von 10 cm = **100 mm**. Diese Einteilung dient dazu, dass man Prozentsätze als Millimeter mit dem Messlineal abmessen kann.

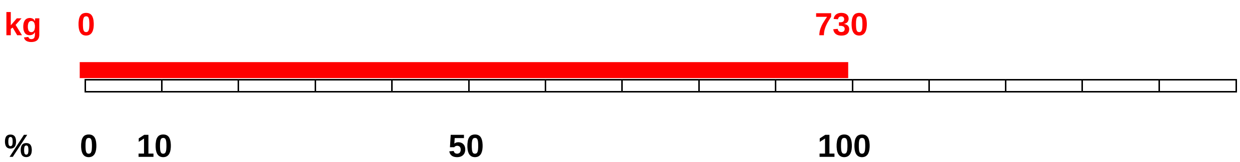


Diese Prozentskala wird durch wenige weitere Eintragungen bei der Marke 50 (Halbierung), 150 und 10 (Zehntelung) ergänzt. Anfangs empfiehlt es sich jeweils das Prozentzeichen noch dazuzuschreiben.

Der zentrale Begriff der Prozentrechnung ist der **Grundwert**. Er kommt je nach Anwendungssituation vor als „das Ganze", Basiswert, Ausgangswert, Anfangswert, Bezugswert, Vergleichsgröße, etc.

Dieser wird bei der Prozentrechnung – also Hundertstelrechnung – eingeteilt in 100 gleiche Teile. Wir veranschaulichen dies in folgender Weise und wählen als Beispiel die Bestimmung von „**65 % von 730 kg**":

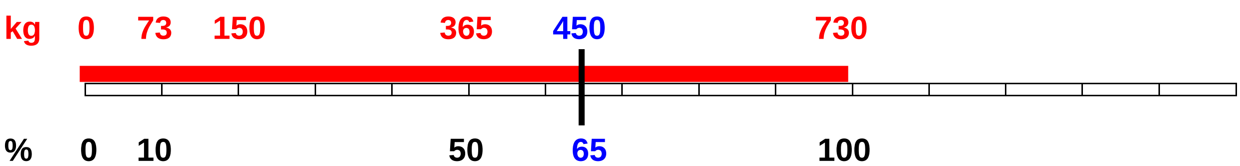
Der Grundwert von 730 kg wird nun – wie die Butter auf dem Brot – gleichmäßig auf dem Streifen von 0 bis 100 verteilt und die Grafik mit einer kg-Skala ergänzt.



Nun sind alle Vorbereitungen getroffen und man kann die zu 50% und zu 10% evtl. auch schon die zu 150% gehörigen kg-Werte leicht eintragen, wobei immer großzügig gerundet wird.

Durch Zusammenstückeln bzw. durch Verdoppeln, Halbieren, Zehnteln, Verzehnfachen etc. kann man sich nun an die Skalenwerte für 65% und den zugehörigen kg-Wert von etwa 450 kg herantasten.

Es kommt dabei nicht auf den genauen Wert an, sondern auf die Art und Weise, wie man ihn bekommen kann. Oft lässt sich durch die „Methode des scharfen Hinsehens" ohne jegliche Zwischenrechnungen ein Näherungswert für das gesuchte Ergebnis angeben:



Lösen Sie mit dieser grafischen Methode die Aufgabe „Grundwert gesucht“ für folgendes Beispiel:

Aufgabe 1:

Von einer Kiste Äpfel waren 13 kg, das sind 30 % aller Äpfel, verdorben.
Wie viel kg wog die ganze Kiste?

3. Vorteile der Doppelleistendarstellung

- Einfache Handhabung auf Karopapier
- Eindimensional und daher gut überschaubar
- Anlehnung an Zahlenstrahl und Streifendiagramm sowie Bruchstreifen aus Klasse 6
- Einfache Parallelisierung mit anderen Darstellungsformen: Dezimalform, Bruchform
- Skalenverlängerung führt ohne Weiteres zu Prozentsätzen über 100% hinaus
- Ermöglicht einfache (visuelle) Ermittlung und Notation von Überschlägen
- Alle drei Grundaufgaben sind am einheitlichen einfachen Schema darstellbar
- Die Doppelleiste als Darstellungsmittel für allgemeine Zuordnungen - insbesondere bei proportionalen Zuordnungen - wird vorbereitet (Dreisatz-Schema).

4. Das Grundanliegen der Prozentrechnung: Relativer Vergleich

Motiviert wird die Prozentrechnung durch den Wunsch nach relativen Vergleichen.

Aufgabe 3:

In der Klasse 7a haben 6 Schüler die Note „sehr gut“ in Sport , in der Klasse 7b dagegen nur 5 Schüler.
Kann man behaupten, die Klasse 7a habe mehr Spitzensportler als die 7b?

Zusatzinformation:
In Klasse 7a sind insgesamt 30 Schüler in Klasse 7b dagegen nur 20.

In welcher Klasse ist die ***Anzahl***, in welcher der ***Anteil*** der Spitzensportler größer?

Wir stellen die Grundgedanken von absolutem und relativem Vergleich gegenüber:

Karin erhält 40 € monatliches Taschengeld Ulrike dagegen 50 €.

Absoluter Vergleich

$$80\ € \xrightarrow{+?} 100\ €$$

„um wie viel mehr“ ?

Es interessiert der <u>Unterschied</u>:

Differenzbildung:

$$100\ € - 80\ € = 20\ €$$

Relativer Vergleich:

$$80 \xrightarrow{\bullet ?} 100\ €$$

„wie viel mal soviel“?

Es interessiert das <u>Verhältnis</u>:

Quotientenbildung:

$$100\ € : 80\ € = \frac{100}{80} = \frac{5}{4} = 1{,}25 = 125\ \%$$

Selbstverständlich wird man bei der Einführung nicht unbedingt ein Beispiel mit einem über 100 % liegenden Vergleich wählen, sondern etwa folgendes Beispiel:

Hans hat von seinem Taschengeld von 20 € schon 5 € für einen Kinobesuch ausgegeben. Welcher Anteil ist das?

5. Prozentsätze haben multiplikativen Charakter

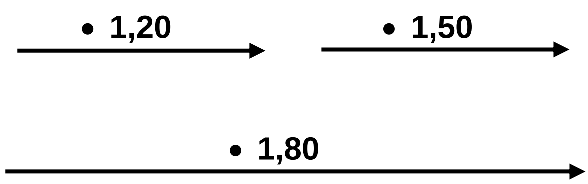
Aufgabe 2:

Ein Kaufmann erhöht den Preis für einen gut gehenden Artikel zunächst um 20% und weil sich der Artikel weiter gut verkaufen lässt noch einmal um 50%. Um wie viel Prozent hätte der Kaufmann den Preis mit einem Schritt auf den nun erreichten Endwert erhöhen müssen?

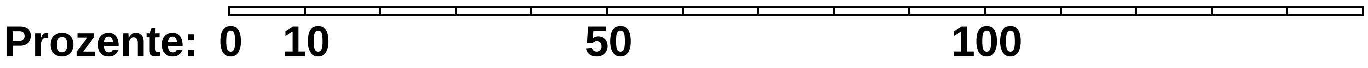
Prozentsätze haben immer multiplikativen Charakter. Man darf sie (fast) nie addieren oder subtrahieren. (Ausnahme: Nur bei gleichem Grundwert):

Falsche Vorstellung

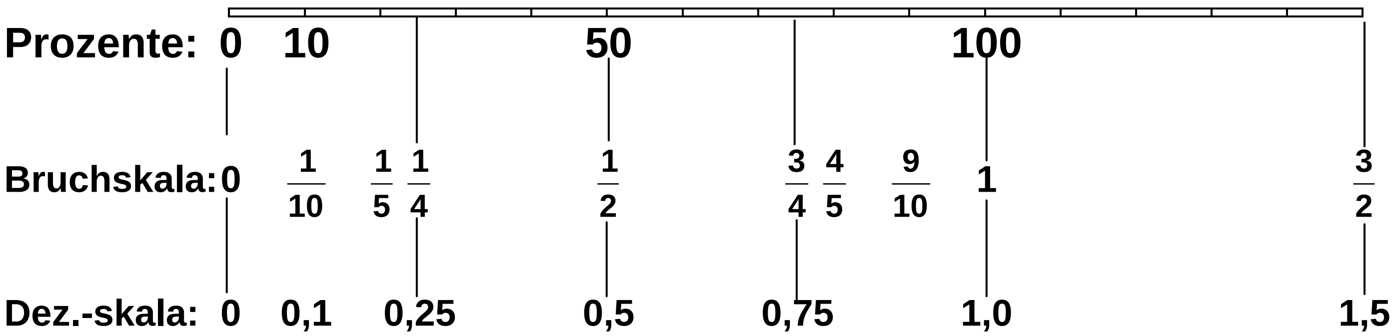
Richtige Vorstellung:

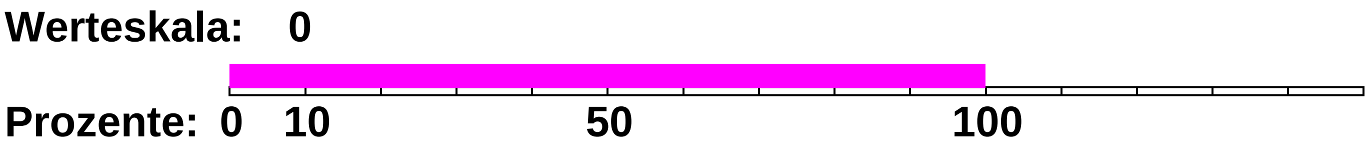


Prozentrechnung anschaulich und „ohne Rechnen“:



Auf der Prozentskala gilt: 1 mm entspricht genau 1%, man kann Prozentsätze also messen!





6. Stufenfolge im Unterricht

a) Zunächst wird der **Prozentbegriff** wie üblich eingeführt als andere Sprechweise für **Hundertstel**. Es wird gezeigt, wie er vor allem als **Verhältnisbegriff** beim relativen Vergleich (Frage: Wie viel mal soviel?) eine Rolle spielt. Bereits in dieser Stufe werden andere Zahlformen (gewöhnliche Brüche, Dezimalform) parallel verwendet: $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

b) Danach wird die Frage nach dem **Grundwert** (**Bezugswert, Ausgangswert, Ganzes, Anfangswert, Vergleichsgröße, Basis, ...**) ins Spiel gebracht: Worauf bezieht sich der Vergleich? Die Schüler haben zunächst nichts anderes zu tun, als anzugeben, was der Grundwert beim gegebenen Sachverhalt (Aufgabe) ist. Die Begriffe Prozentsatz und Prozentwert sind zweitrangig und man kann getrost auch ganz auf sie verzichten. Das A und O der Prozentrechnung ist der Grundwert.

c) Nun beginnen wir mit der oben dargestellten **grafische**n **Veranschaulichung**.
An dieser behandeln wir die drei **Grundaufgaben** in überschlägiger Behandlung (Kopfrechnen schulen):

a) Prozentwert gesucht; b) Prozentsatz gesucht; c) Grundwert gesucht.

Die dritte Grundaufgabe bedarf einer gewissen Aufmerksamkeit in der Behandlung, weil der Eintrag des Grundwerts nicht von Anfang an möglich ist. Er wird nach Eintrag der bekannten Angaben durch grobes Extrapolieren ermittelt.

d) In diesem Stadium können alle Prozentaufgaben näherungsweise **ohne Rechnen, aber mit viel Verständnis** ("Einsicht"), gelöst werden. Man muss sich für diese Phase Zeit lassen. Die nachfolgende Rechenphase im Tabellenschema ist dann nur noch das Einsammeln vorher gemachter Erfahrungen!

e) In der anschließenden Phase werden unter Anwendung des Dreisatzschemas – angelehnt an die Vorstellung aus der grundlegenden Grafik – die Grundaufgaben der Prozentrechnung mit Hilfe des ETR zahlenmäßig exakt behandelt. Es wird dringend empfohlen, vor jeder Rechnung einen Überschlag an Hand einer groben Freihandskizze nach dem Grundschema der Prozentleiste durchzuführen und daran das Rechenergebnis zu kontrollieren.

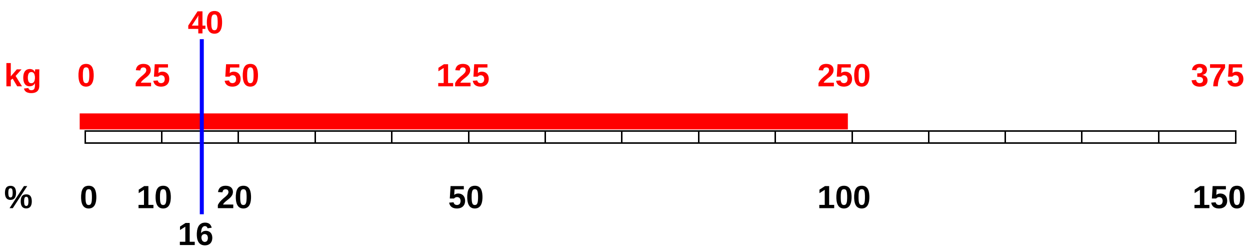
7. Lösungsformen für die Grundaufgaben der Prozentrechnung

Wir stellen die möglichen Lösungsformen anhand einfacher Beispiele dar und zwar für jede der drei Grundaufgaben der Prozentrechnung:

Grundaufgabe 1: Wie viel sind 16% von 250 €?

Zunächst empfehlen wir stets und immer bei Prozentaufgaben einen einfachen Überschlag an Hand der in Abschnitt 2 eingeführten Doppelleiste zu machen und zwar unabhängig von der gewählten Lösungsmethode. Im vorliegenden Fall etwa so:

Man trägt zunächst wie immer an der 100-mm-Leiste die Marken für 0%, 100%, 50%, 150% auf der Prozentskala und die dazugehörigen (gerundeten) Werte (hier Euro-Beträge) auf der Werteskala ein. Im vorliegenden Fall ergänzt man noch den 20% - Eintrag und erhält als Überschlag etwa den Mittelwert zwischen 10% und 20%.



- **Dreisatz mit Operatoren:**

  Eine erste und sehr empfehlenswerte Lösungsform ist der Dreisatz mit Operatoren bzw. das Tabellenschema mit Operatoren:

  Wir verzichten auf die Wiedergabe des Dreisatzschemas und verweisen diesbezüglich auf die Lösungsformen für Proportionalitäten.

- **Operatorschema:**

  250 € $\xrightarrow{\cdot\ 0{,}16}$ 40 €.

  Hierbei wird man den Operator in Dezimalform angeben, wenn man mit dem Taschenrechner rechnet bzw. in Prozentform oder Bruchform, wenn man im Kopf rechnet.

- **Verhältnisgleichung:**

  $x : 250 = 16 : 100$ bzw. $\frac{x}{250} = \frac{16}{100}$ und daraus $x = \frac{16 \cdot 250}{100} = 40$

Grundaufgabe 2: Ein Preis wird von 60,00 € um 21,00 € auf 81,00 € erhöht. Wie viel Prozent beträgt die Erhöhung?

Auch in diesem Fall wird man unabhängig von der gewählten Lösungsform auf alle Fälle vorab eine Skizze mit der bekannten Doppelskala für einen einfachen Überschlag anfertigen. Führen Sie dies zur Übung selbst durch, auch um zu erkennen, welche Überlegungen dabei durchgeführt werden müssen.

- **Dreisatz mit Operatoren:**

  Ein Überschlag an Hand der Doppelskala aus 2. sollte vorangehen.

	60 €	sind	100%	
: 60				: 60
	1 €	ist	(100:60) %	
* 21				* 21
	21 €	sind	(100:60)*21 % = 35 %.	

- **Operatorschema:**

$$\begin{tikzcd} 60\text{ €} \arrow[rr, "\cdot ?"] \arrow[dr, ": 60"'] & & 21\text{ €}. \\ & 1\text{ €} \arrow[ur, "* 21"'] & \end{tikzcd} \qquad \frac{21}{60} = 0{,}35 = 35\%$$

- **Verhältnisgleichung:**

  x : 100 = 21 : 60 bzw. $\frac{x}{100} = \frac{21}{60}$ daraus $x = \frac{21 \cdot 100}{60} = 35$.

Grundaufgabe 3: Im Schlussverkauf kostet eine Hose 42,00 € weniger. Das ist ein Preisnachlass von 30%. Wie hoch war der reguläre Preis?

Machen Sie zunächst einen Überschlag mit Hilfe der bekannten Doppelleiste.

- **Dreisatz mit Operatoren (**hier weggelassen**):**

30 %	sind	42,00 €
1 %	ist	(42,00 : 30) €
100 %	sind	(42,00 : 30) * 100 € = 140,00 €

- **Operatorschema:**

$$? \xrightarrow{\cdot\, 0{,}30} 42{,}00\ €$$
$$\xleftarrow{:\, 0{,}30}$$

Rechnung: 42,00 € : 0,30 = 140,00 €.

- **Verhältnisgleichung:**

x : 42 = 100 : 30 bzw. $\frac{x}{42} = \frac{100}{30}$ daraus $x = \frac{100 \cdot 42}{30} = 140$

Die sicher einfachste und am leichtesten zu durchschauende Lösungsform ist der Dreisatz mit Operatoren. Sowohl das Operatorschema als auch die Verhältnisgleichung (erst recht die allgemeine algebraische Gleichung Pw = Gw * Ps bzw. P = G * p/100) erfordern bei der Anwendung jeweils einige algebraische Grundkenntnisse und Techniken.

Nach Einübung der Grundaufgaben erfolgt der Übergang zu den Änderungsfaktoren.

8. Erhöhter bzw. verminderter Grundwert. Änderungsfaktoren

Der entscheidende Schritt bei der Prozentrechnung ist der Übergang von den Prozentsätzen zu den Faktoren, also von der Änderungsrate zum Änderungsfaktor. Wir erläutern dies an einem Beispiel:

Aufgabe 3:

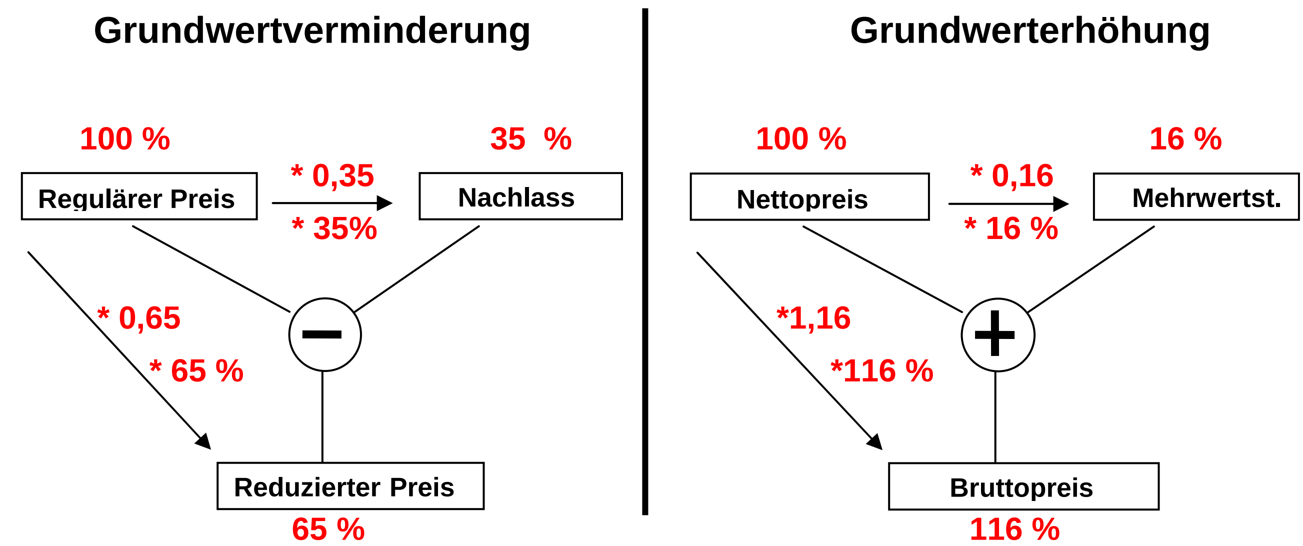
a) Beim Winterschlussverkauf werden alle Preise um 35 % gesenkt. Wie kann man ganz einfach aus den regulären Preisen auf die Endpreise schließen, ohne Berechnung der Preisreduktion?

b) Durch die Mehrwertsteuer werden alle Nettopreise um 16 % erhöht. Wie kann man ganz einfach aus den Nettopreisen auf die Endpreise schließen, ohne Berechnung der Mehrwertsteuer?

Bei beiden Aufgaben findet also gegenüber den bisherigen Grundaufgaben eine Wendung der Fragestellung im folgenden Sinne statt:

An Stelle der Frage „**um welchen Betrag ändert sich der Preis**“ stellt man die Frage „**auf welchen Betrag ändert sich der Preis**“.

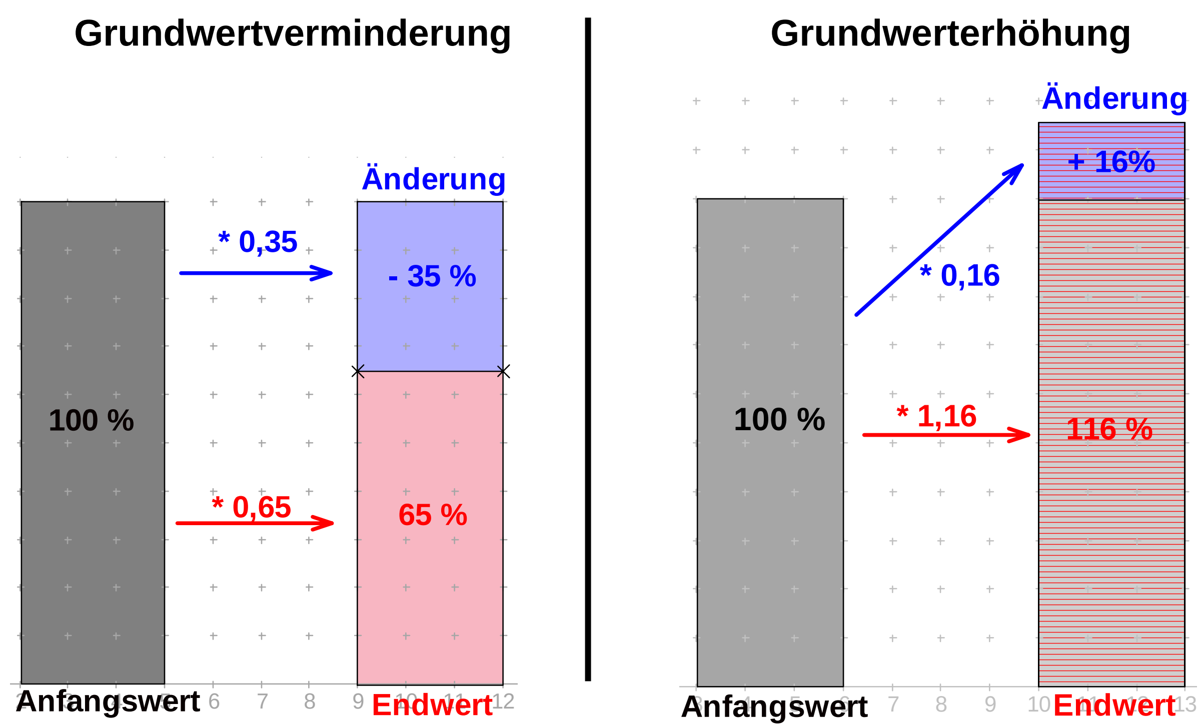
Wir stellen dies übersichtlich in zwei Diagrammen für die in Aufgabe 3 gegebenen Beispiele dar:



Wenn wir also nicht fragen **um** welchen Prozentsatz, sondern **auf** welchen Prozentsatz sich eine Größe ändert, dann erhalten wir den **Änderungsfaktor**, mit dem sich sofort auf den Endwert schließen lässt.

- Einer Reduzierung um 35 % entspricht ein Endwert von 65 %, und daher ein Änderungsfaktor von 0,65.
- Einer Erhöhung um 16 % entspricht ein Endwert von 116 % und daher ein Änderungsfaktor von 1,16.

Wenn sich dieser Übergang von der Änderungsrate zum Änderungsfaktor bei Schülern vermitteln lässt, dann hat man einen großen Schritt zum verständnisvollen Umgang mit Prozentsätzen erreicht. Man muss zu diesem Zweck den Sachverhalt an vielen einzelnen Beispielen durchdenken, durchrechnen und anschaulich darstellen. Neben den oben angegebenen Diagrammen in Form von Rechenbäumen eignen sich dafür besonders auch die folgenden Formen von Streifendiagrammen:



1. Bruchform – Prozentform – Dezimalform

Man kann Zahlen in verschiedenen Formen angeben. Fülle die Tabelle aus wie in den folgenden Beispielen:

$\frac{2}{5}$ = 0,40 = 40 % 7% = $\frac{7}{100}$ = 0,07 116% = $\frac{116}{100}$ = 1,16 $\frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = \frac{12{,}5}{100}$ = 12,5%

Bruchform	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{5}$											$\frac{5}{4}$
Dezimalform	0,60			0,10	0,80	1,30	0,15					0,75	0,125	0,16	
Prozentform	60%							3,5%	120%	116%	98%				

2. Prozentuale Änderungen

Prozentuale Änderungen können durch Änderungsfaktoren angegeben werden. Ergänze die folgende Tabelle.

Änderungsfaktor = 1 ± Prozentsatz = 1 ± $\frac{p}{100}$ = 100% ± p% (+ bei Zunahme; – bei Abnahme).

Änderung **um**	+ $\frac{3}{8}$	- 2%	+ 16%	+ $\frac{3}{5}$	- $\frac{2}{5}$								+ $\frac{7}{10}$
Änderung **auf**	$\frac{11}{8}$	98%				$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$					
Änderungsfaktor	•1,375	•0,98							•1,75	•1,035	•0,97	•1,05	•1,80	

3. Einfaches Rechnen mit Änderungsfaktoren

Anfangswert • Änderungsfaktor = Endwert

A • q = E

$\boxed{\text{Anfangswert}} \xrightarrow{\bullet\ \text{Änderungsfaktor}} \boxed{\text{Endwert}}$

Anfangswert	75,00	125,00	250,00				170,00	1234,00	760,00			225,00	350,00
Änderungsfaktor	•1,160	•0,850		•1,375							•1,44		
proz. Änderung	+ 16%		+ 3,5%		+ 16%	- 2%			+ 25 %	- 35 %			
Endwert	87,00			555,50	377,00	346,92	182,75	2345,00		876,54	567,89	250,00	1050,00

4. Mehrere prozentuale Änderungen:

$\boxed{\text{Anfangswert}} \xrightarrow{\bullet\ \text{Änderungsfaktor1}} \boxed{\text{Zwischenwert 1}} \xrightarrow{\bullet\ \text{Änderungsfaktor2}} \boxed{\text{Endwert}}$

• (Änderungsfaktor1 • Änderungsfaktor2)

Anfangswert	175 €	175	432 kg	1236 m	680 €	276 €			570 kg		650 €
Änderungsfaktor1	• 1,16	• 0,8	• 0,6	• 1,2	• 1,25	$\bullet\ \frac{3}{4}$		$\bullet\ \frac{3}{4}$		$\bullet\ \frac{6}{5}$	• 1,20
Änderungsfaktor2	• 0,8	• 1,16	• 1,6		• 0,8		• 1,25		$\bullet\ \frac{3}{4}$		
Ges. Änd.-faktor	• 0,928			• 1,44		• 1	• 1,5	$\bullet\ \frac{3}{5}$			
Ges. proz.Änderung	- 7,20%								+ 25%	- 40%	+ 80%
Endwert	162,40 €						360	630 €		720	

9. Zinsen für Teile eines Jahres

Ein einfaches und zugleich wichtiges Beispiel für die Verkettung von Änderungsfaktoren ist die Berechnung der Zinsen für Teile eines Jahres. Wir zeigen dies an einem Beispiel:

Ein Kapital von 1234,- € wird bei einem Zinssatz von 3% p. a. nur 7 Monate lang verzinst. Wie viel Euro erhält man an Zinsen für diesen (unterjährigen) Zeitraum?

Hinweis: Die Angabe „p. a." bei Zinssätzen bedeutet „per annum", also pro Jahr.

Lösung in Operatorform:

$$1236.\text{- €} \xrightarrow{\bullet 0{,}03} 37{,}08\text{ €} \xrightarrow{\bullet \frac{7}{12}} 21{,}63\text{ €}$$

$$\text{Kapital} \xrightarrow{\bullet Zinssatz} \text{Jahreszins} \xrightarrow{\bullet Zeitfaktor} \text{Zeitzins}$$

Allein schon die grafische Anordnung zeigt die zentrale Stellung des Jahreszinses. Man kann daraus schon für alle Aufgaben in diesem Sachkontext die Empfehlung aussprechen:

Berechne stets zuerst den Jahreszins.

ine Anordnung nach der ***Dreisatzmethode*** zeigt die hintereinander geschachtelten Dreisätze für die beiden Teilaufgaben:

1. Berechnung des Jahreszinses:

100 %	sind	1236.- €
1 %	ist	12,36 €
3 %	sind	37,08 €

2. Berechnung des Zeitzinses:

Für 12 Monate	gibt es	37,08 € Zinsen
Für 1 Monat	gibt es	37,08 : 12 = 3,09 € Zinsen
Für 7 Monate	gibt es	3,09 * 7 = 21,63 € Zinsen.

Auch in dieser Anordnung erkennt man wieder die zentrale Stellung der Jahreszinsen.

Aufgabe :

Von den 4 Größen Kapital, Zinssatz p. a., Verzinsungszeit und Zeitzinsen müssen drei gegeben sein um die vierte berechnen zu können.
Lösen Sie je eine selbstgestellte Aufgabe zu jedem Typ. Wo gibt es Schwierigkeiten?

10. Aufgabenbeispiele zur Prozentrechnung

Aufgabe 4: Grundwerterhöhung und -verminderung

a) Der Preis für eine Fahrkarte wurde um 15 % erhöht auf 27,60 €. Wie hoch war der ursprüngliche Preis?

b) Im Winterschlussverkauf werden alle regulären Preise um 25 % herabgesetzt, so dass eine Jacke nur noch 146,25 € kostet. Wie hoch war der reguläre Preis und um wie viel Euro wurde er herabgsetzt?

Aufgabe 5: Versteckte Preiserhöhung

a) Ein Teeladen erhöht die Preise dadurch, dass er die Packung, die seither 5 g Tee enthielt, künftig nur noch mit 4 g füllt, aber den Preis beibehält. Die Menge wird also um 20% reduziert, der Preis bleibt gleich. Um welchen Prozentsatz wird dadurch der Preis erhöht?

b) Ein Beutel Zitronen enthielt bisher 4 Stück. Nun sollen sie billiger werden, indem der Preis für eine Packung beibehalten wird, aber künftig 5 Zitronen in der Packung sind, d.h. die Menge wird um 25 % erhöht, der Preis bleibt gleich. Um welchen Prozentsatz wird dadurch der Zitronenpreis verbilligt?

c) Geben Sie für diese Modellfälle allgemeine Aussagen an:
Welcher Preiserhöhung entspricht die Verminderung der Menge um x %?
Welcher Preisreduktion entspricht die Erhöhung der Menge um x %?

Aufgabe 6: Mehrwertsteuer

a) Die Regierung eines Landes will die Mehrwertsteuer, die bisher 25 % betrug, zur Reduzierung des Staatsdefizits auf 30 % erhöhen. Die Opposition wettert: „Künftig wird alles um 5% teurer!“ Die Regierung hält dagegen: „Dafür reduzieren wir die Mehrwertsteuer für Lebensmittel von bisher 25 % auf 20 %. Alle Lebensmittel sind also künftig um 5 % billiger.“ Nehmen Sie als aufgeklärter Bürger Stellung zu diesen Aussagen und stellen Sie diese richtig.

b) Auf dem Kassenzettel im Supermarkt steht:
“Zu zahlender Endbetrag 272,02 €. Dieser Betrag enthält 16 % Mehrwertsteuer.“
Wie viel Prozent des Endbetrags beträgt die Mehrwertsteuer?
Welcher Betrag an Mehrwertsteuer ist im Endbetrag enthalten?

Aufgabe 7: „Wahlanalysen“

Partei XYZ hat bei der vorhergehenden Wahl 8% , diesmal aber nur noch 6% der Stimmen erhalten.
Folgende Kommentare sind zum Wahlergebnis im Fernsehen zu hören:

(1) „Die XYZ hat einen leichten Verlust in Höhe von nur 2% zu verkraften."

(2) „Die XYZ hat einen Verlust in Höhe von 25% hinnehmen müssen."

(3) „Die XYZ hat zwei Prozentpunkte eingebüßt."

(4) „Die XYZ hat ein Viertel ihrer Wähler verloren."

(5) „Die XYZ ….

a) Wer hat wohl welche Aussage gemacht und mit welcher Absicht?

b) Welche der Aussagen sind sachlich richtig und welche sind sachlich falsch?

Aufgabe 8: Gewinn oder Verlust?

Ein Händler verkauft zwei Autos zum selben Preis von 4800 €, eines mit 20% Gewinn, das andere mit 20% Verlust. Am Abend erzählt er seiner Frau, heute sei er gerade noch mit einem blauen Auge davongekommen und habe finanziell weder gewonnen noch verloren. Nehmen Sie sachlich Stellung zu dieser Aussage.

Aufgabe 9: Wer ist der günstigste Anbieter?

Ein Fahrrad kostet laut Katalog 1234.- € (Katalogpreis KP). ,
Welcher Händler macht das günstigste Angebot? Schätzen Sie zuerst.

A: Katalogpreis + 16% Mehrwertsteuer, darauf dann 20% Rabatt

B: Katalogpreis mit 20% Rabatt, darauf dann + 16% Mehrwertsteuer

C: Katalogpreis mit 4% Nachlass (4 % = 20 % – 16 %).

Bei welchem Händler kauft man am günstigsten ein?

Aufgabe 10: Gewichtsverlust

100 kg Erdbeeren mit 99% Wassergehalt werden so lange getrocknet bis der Wassergehalt nur noch 98% beträgt. Wie hoch ist der dabei auftretende Gewichtsverlust bzw. wie viel kg wiegen die Erdbeeren nach dem Trocknen?

Wenn Sie die vorstehende Aufgabe 10 richtig gelöst haben, werden Sie über das Ergebnis überaus erstaunt sein und es zunächst nicht glauben wollen. Es stellt sich jedoch ganz anders dar, wenn man dieselbe Aufgabe anders formuliert:

Aufgabe 10a: Gewichtsverlust

100 kg Erdbeeren haben einen Gehalt von 1% (bzw. 10%) an Trockensubstanz, der Rest ist Wasser. Sie werden nun getrocknet, bis der Gehalt an Trockensubstanz auf 2% (bzw. 20%) gestiegen ist. Wie viel kg Wasser ist dabei verdampft?

Lösungsansatz:

Grundgedanke: Beim Trocknen bleibt die Trockensubstanz gleich, nur Wasser wird verdampft.

	Wassergehalt	**Trockensubstanz**
Vor dem Trocknen	99% bzw. 99 kg	1% bzw. 1 kg
Nach dem Trocknen	98 % bzw. ????	2% bzw. 1 kg

Aufgabe 11: Heizkostenersparnis

Die Innung der Heizungsbauer wirbt mit folgender Zeitungsannonce:

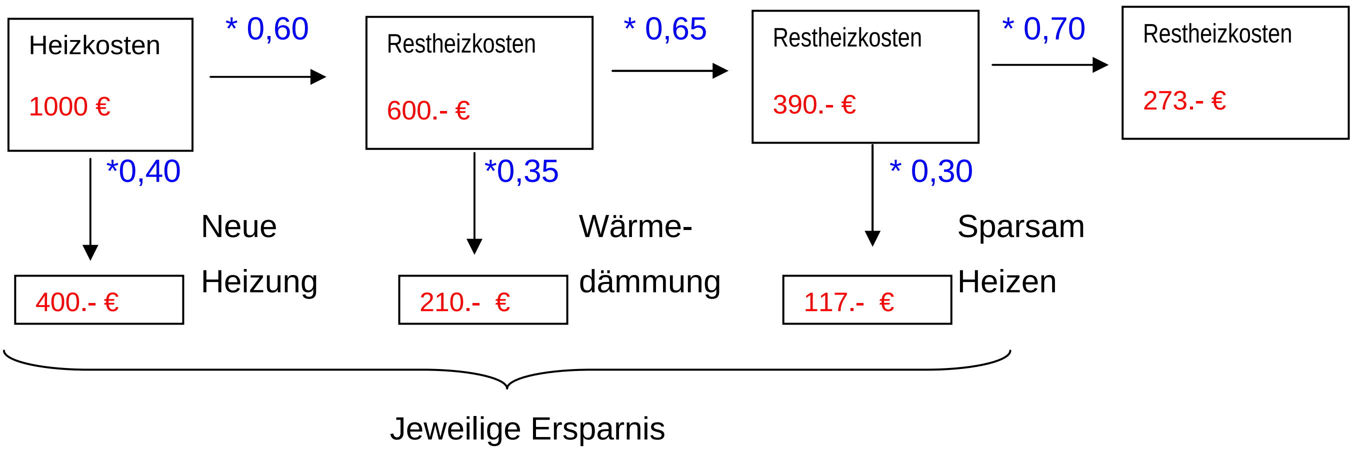
So kann man Heizkosten sparen: *Durch eine neue Heizanlage bis zu 40%,*
durch Wärmedämmung am Haus bis zu 35%,
durch sparsames Heizen bis zu 30%.

Max Schlau hat gleich alle drei Maßnahmen realisiert. Hat er noch Restheizkosten?

Wir bieten für diese interessante Aufgabe einen Lösungsvorschlag und Hinweise zur Methodik im Unterricht an:

Lösungsvorschlag:

Nach Schätzungen und Voraussagen wird in einem ersten Durchgang ein leeres Raster erstellt, das nur den Sachverhalt repräsentiert. Die blauen und roten Einträge sind also im ersten Durchgang nicht vorhanden:



Erst nachdem dieses Leerraster mit Beschriftungen erstellt ist, kümmert man sich um die quantitative und rechnerische Seite der Sache (Mathematik ist mehr als Rechnen!):

Jetzt werden die Daten aus der Aufgabe übernommen und eingetragen (hier blau) bzw. ergänzt.
Eine weitere Hilfe für Schüler könnte sein, von einem konkreten Betrag der Heizkosten auszugehen und die Sache damit durchzurechnen (roter Eintrag).

Aufgabe 12: Verdopplung bzw. Halbierung.

a) Ein Händler will den Preis für einen gut gehenden Artikel durch 5-malige Erhöhung um jeweils 20 % verdoppeln. Was meinen Sie dazu?

b) Ein schlecht laufender Artikel soll durch 5-malige Reduzierung um jeweils 10 % auf den halben gegenwärtigen Preis reduziert werden. Kommt das hin?

Aufgabe 13: Eine komplexe Aufgabe zur Prozentrechnung (Zinseszinsen)

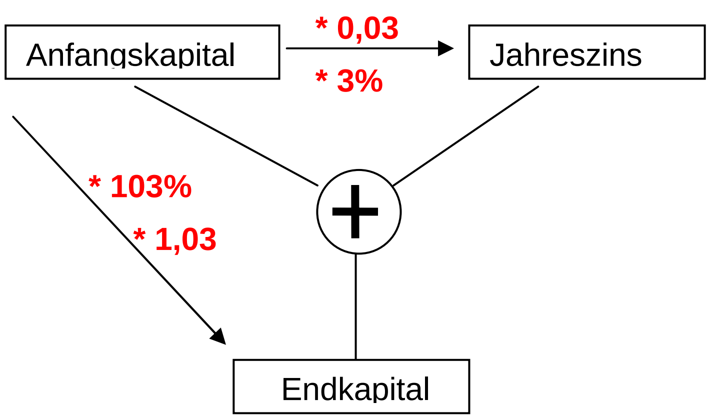
Wie viel Geld hätte man heute samt Zins und Zinseszins, wenn man zur Zeit von Christi Geburt 1 € angelegt hätte und dieser mit 3% verzinst worden wäre?

Wir geben einen kurzen Überblick über eine mögliche Behandlung in der Schule (als integrierende und wiederholende problemorientierte Aufgabe):

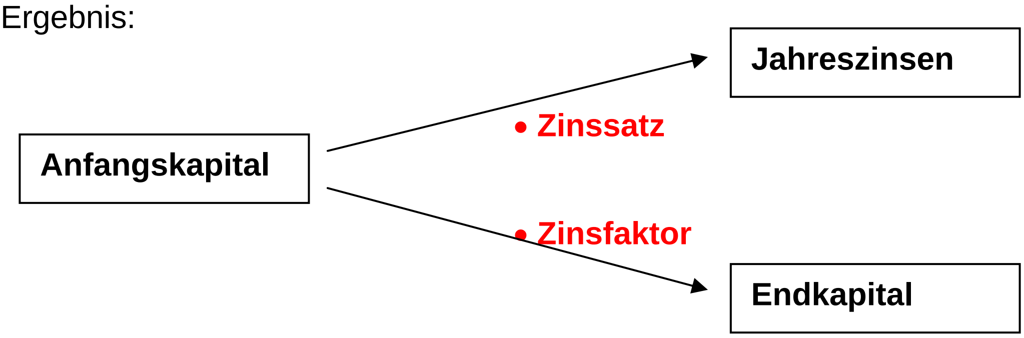
Schritt 1: Schätzungen abgeben und damit Erwartungshaltungen wecken.
Einfacher Zins? Dieser ist zumindest eine Untergrenze.

Schritt 2: Vorbereitende Übungen zu Veränderungsfaktoren:
Zunahmen um 3% bedeutet * 1,03.
Abnahme um 20% bedeutet * 0,8.
Zunahme um 16 % bedeutet * 1,16.
…..

Schritt 3: Anwendung des Schemas vom vermehrten Grundwert auf die Zinsrechnung.
Herausarbeiten des Zusammenhangs und des Unterschieds von **Zinssatz** und **Zinsfaktor.** Der formelmäßige Zusammenhang $q = 1 + \frac{p}{100}$ ist dabei unwichtig. Wichtig ist das Erfassen des inhaltlichen Zusammenhangs:
Wird das Kapital (100%) um den Jahreszins (3%) vermehrt, so erhält man das Endkapital (103%).



Ergebnis:



Schritt 4: Verketten von Veränderungsfaktoren:

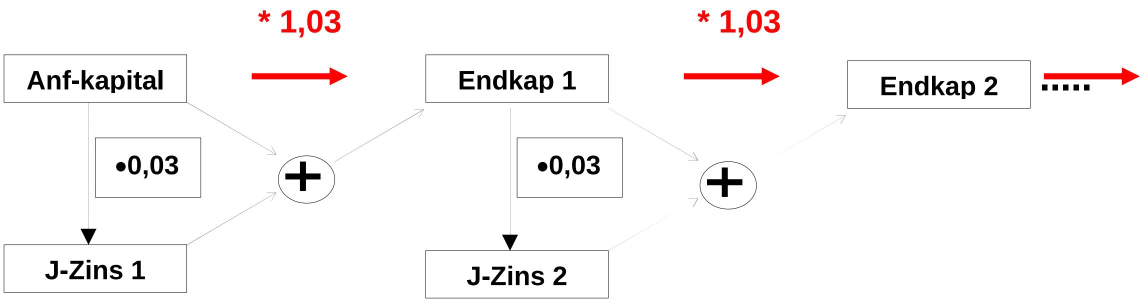
*2 verkettet mit *3 ergibt *6 und nicht *5.

Man arbeitet zuerst mit ganzen Zahlen (bitte nicht am Beispiel *2 *2) die Verkettung von Multiplikationsoperatoren: $\xrightarrow{\bullet 3}\xrightarrow{\bullet 4} = \xrightarrow{\bullet 12}$

Bei den Beispielen der Art $\xrightarrow{\bullet 1{,}03}\xrightarrow{\bullet 1{,}04}$ kommen nochmals gravierende Schülerfehler vor, auf die man achten muss. Welche?

Schritt 5: Anwendung auf die eingangs gestellte Fragestellung:

Nun kann man die bisher gemachten Erfahrungen auf die Problemstellung anwenden und ein Berechnungsschema für die Zinseszinsaufgabe entwickeln:



Mit Hilfe des Zinsfaktors kann man nun die Ausrechnung des Endkapitals nach n Jahren vereinfachen:

$$K_0 \xrightarrow{*q} K_1 \xrightarrow{*q} K_2 \xrightarrow{*q} K_3 \; ..... \xrightarrow{*q} K_n \text{ bzw. } K_n = K_0 * q^n.$$

Als Lösung unseres Ausgangsproblems ergibt sich daher:

K_{2000} = 1 € * $1{,}03^{2000}$ = 47255178755828605388683227,53 €
= 47,255 * 10^{24} €.

Was könnte man mit dieser unvorstellbaren Summe nicht für jeden einzelnen Menschen auf der Erde ausrichten?

11. Zwei Ergänzungen für Lehrer:

Man kann für die vorhergehende Aufgabe zur Verzinsung mit Zinseszinsen über 2000 Jahre eine einfache Überschlagsrechnung anstellen, wenn man zwei außerordentlich hilfreiche Einzelkenntnisse verwendet, die jeder Mathematiklehrer für die Sekundarstufe kennen und zur Verfügung haben sollte:

a) Die p * d $\approx$ 70 – Regel:

Ändert sich ein bestimmter Wert regelmäßig mit gleich bleibenden Prozentsätzen von jeweils p%, so verdoppelt bzw. halbiert sich der Wert nach d solchen Änderungsschritten und es gilt $p * d \approx 70$.

Wir beweisen diese Regel für eine Zunahme d. h. p ist positiv. Für eine Abnahme verläuft der Beweis ganz analog:

Es gelte $K_n = K_0 * q^n$ wobei $q = 1 + p\%$ der Änderungsfaktor ist.

Nach $n = d$ Schritten soll Verdopplung stattfinden, also muss gelten:

$K_d = K_0 * q^d = 2 * K_0$ woraus folgt: $2 = q^d$.

Nun lässt sich die Zahl q darstellen als Potenz der Eulerschen Zahl e: $q = e^{\ln(q)}$.

Setzen wir dies in die erhaltene Gleichung ein und logarithmieren auf beiden Seiten, so erhalten wir unter Verwendung des natürlichen Logarithmus:

$\ln(2) = d * \ln(q)$.

Für kleine Werte von x gilt nun die Beziehung $\ln(1+x) \approx x$, wie man durch einzelne Beispiele mit Hilfe eines ETR leicht bestätigen kann. Ansonsten ist dies das Anfangsglied der Reihenentwicklung für ln(1+x). Wir verwenden diese Beziehung:

$\ln(2) = d * \ln(q) = d * \ln(1+\frac{p}{100}) \approx d * \frac{p}{100}$. Nun ist $\ln(2) \approx 0{,}7$ womit unsere Regel bewiesen ist.

Sie ist außerordentlich hilfreich bei Abschätzungen der Folgen von prozentualem Wachstum oder prozentualer Abnahme.

Beispiele:

- Die Bevölkerungszahl eines Landes wächst jährlich um 2,5 %.
  Nach der $p*d \approx 70$ – Regel wird sich die Bevölkerungszahl etwa alle 25 Jahre verdoppeln, in einem Jahrhundert also auf das 16-fache anwachsen!!!
- Der Ölverbrauch eines Landes kann jedes Jahr um 5% gesenkt werden.
  Folglich kann man dadurch in einem Zeitraum von 14 Jahren eine Halbierung des derzeitigen Verbrauchs erreichen.
- Der Luftdruck nimmt mit je 100 m Höhenzunahme um jeweils ca. 1,4% ab.
  In welcher Meereshöhe herrscht nur noch der halbe normale Luftdruck?

Wie hoch ist der Luftdruck noch in ca. 8000 m Höhe auf dem Mt. Everest?
Was bedeutet das für einen Bergsteiger?

- Die Halbwertszeit eines bestimmten radioaktiven Materials beträgt 140 Jahre.
  Um wie viel Prozent nimmt das Material pro Jahr durch Verstrahlung ab?
- u. v. a. m.

b) Es gilt $2^{10} \approx 10^3$. Denn $2^{10} = 1024$ und $10^3 = 1000$.

Wir zeigen, wie man mit diesen beiden Kenntnissen das Verzinsungsproblem über 2000 Jahre einer einfachen Überschlagsrechnung unterziehen kann:

Prozentuale Zunahme um jeweils 3% pro Jahr bedeutet nach der p * d = 70 – Regel eine Verdopplung in ca. 25 Jahren, also etwa vier Verdopplungen in einem Jahrhundert, d. h. das $2^4 = 16$ - fache nach je 100 Jahren.

In 20 Jahrhunderten kommt man daher auf eine Veränderung mit dem Faktor

$(2^4)^{20} = 2^{80} = (2^{10})^8 \approx 10^{24}$. Dieser einfache Überschlag steht in bester Übereinstimmung mit unserem oben errechneten Ergebnis!

<u>Eine kleine Anmerkung zum Schluss:</u>

Was macht eine Problemaufgabe aus?

- Offenheit der Aufgabenstellung
- Nicht unbedingt eindeutige Lösung
- Ausreichende Problemvermittlung und dadurch Motivation (Voraussagen!). Dazu gehört auch eine hinreichende Sachverhaltsklärung wie die Vermittlung von Alltagswissen: Non scholae, sed vitae discimus!.
- Betroffenheit der Schüler vom Problem: Aufbau von Erwartungshaltungen.
- Herausforderung (Widerspruch, Verführung, Anstoß) in der Aufgabenstellung.
- Erwartungswidrige, unglaubliche oder zumindest zweifelhafte Lösungen.
- U.a.m.

Bemerkung:

Problemorientierung stellt nicht so sehr die routinemäßige Lösung der Aufgabe in den Vordergrund, sondern das Befassen mit der zu Grunde liegenden Fragestellung, das Ergründen der wirklichen Problemstellungen, das Wissenwollen um die Sachverhalte. Das kommt nicht unbedingt den üblichen Schülerhaltungen entgegen („Warum müssen wir beim Prozentrechnen nachdenken, warum dürfen wir nicht einfach rechnen?“). Schüler lieben es eher, Rezepte zu verwenden mit denen sie jegliches Nachdenken und Befassen mit der Sache selbst umgehen und blind rechnen können.

Formeln und Rezepte sind oft der sicherste Weg, das Nachdenken über einen Sachverhalt wirksam zu verhindern.