Didaktik der Zahlbereiche

Natürliche Zahlen

Aufbau und Einführung

Erinnerung: Didaktische Grundfragen

- Welche Inhalte werden behandelt?
- In welcher Reihenfolge?
- Welche mentale Modelle werden erzeugt?
- Wie werden diese unterstützt?
- Wie sind die Grenzen der Modelle / Aspekte / …?
- Wie lassen sich allgemeine mathematische Kompetenzen entwickeln?
- …

Überblick

- Menge der natürlichen Zahlen N
- besondere natürliche Zahlen
- Mentale Modelle
- curriculare Vorschriften
- unterrichtliche Aspekte

Inhalte

- Was sind natürliche Zahlen?
  - Zählzahlen zur Bestimmung von Anzahlen / Kardinalzahlaspekt
    - „Eins, zwei, mehrere, viele“
    - Benennung zeigt Zusammenhang mit *Zehnfingrigkeit* („Digits“ (Finger), „zehn“ (Zehen), …)
  - Zählzahlen zur Bestimmung der Reihenfolge / Ordinalzahlaspekt
    - „An der 5. Stelle steht …“
    - „Die 17 kommt nach der 16…“

Adam Riess: Zählen


Ein Bericht vom Numeriren/
oder Zehlen.

NUmeriren heiset Zehlen/ und lehret/ wie man eine jegliche Zahl/ oder Summa/ sie sey kurtz oder lang/ recht schreiben und außsprechen sol. Es gehören aber darzu nicht mehr als zehen Figuren (oder Ziffern/) damit auch die allergrössesten/ ja fast unaußsprechliche Summen/ beschrieben und außgesprochen werden/ nehmlich: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Adam Riess: Zählen

„Ein Bericht vom Numerieren / oder Zehlen.

Numerieren heißet Zehlen / und lehret / wie man ein jegliche Zahl / oder Summa/ sie sey kurz oder lang / rechtschreiben und aussprechen soll.“

Quelle: Adam Riess: „Rechnung nach der lenge auff den Linihen und Feder“, 1550

Definition: Natürliche Zahlen

- Forderungen:
  - Das Zählen muss einen Anfang haben!
  - Zu jeder Zahl muss es einen Nachfolger geben!
  - Die Anfangszahl darf keinen Vorgänger haben und zwei verschiedene Zahlen dürfen nicht denselben Nachfolger haben.
  - Man muss rückwärts zählen können (außer von der Anfangszahl)!
  - Das Rückwärtszählen muss abbrechen!

Definition: Natürliche Zahlen

- Peano Axiome
  - Guiseppe Peano
  - 1858 – 1932, Turin
  - http://de.wikipedia.org/wiki/Peano

Definition: Natürliche Zahlen

- Peano Axiome
  - Guiseppe Peano
  - 1858 – 1932, Turin
  - http://de.wikipedia.org/wiki/Peano

Definition: Natürliche Zahlen

Peano- Axiome:

(1) Jedem $n \in \mathbb{N}_0$ ist genau ein $n' \in \mathbb{N}_0$ zugeordnet, das der *Nachfolger von n* heißt.

(2) Es gibt ein $a \in \mathbb{N}_0$ (a wie Anfang), das für kein $n \in \mathbb{N}_0$ Nachfolger ist.

(3) Sind $n, m \in \mathbb{N}_0$ verschieden, so sind auch die Nachfolger n', m' verschieden. (bzw. aus $n = m$ folgt $n' = m'$)

(4) Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ mit $a \in M$ und enthält M zu jedem Element auch dessen Nachfolger, so gilt $M = \mathbb{N}_0$ (Vollständige Induktion)

Besondere natürliche Zahlen

- Gerade / Ungerade Zahlen
  - o Eine natürliche Zahl ist gerade, wenn sie ohne Rest durch 2 teilbar ist. ($g = 2*n$, $n \in \mathbb{N}_0$)
  - o Eine natürliche Zahl ist ungerade, wenn sie bei der Division durch 2 einen Rest besitzt. ($u = 2*n + 1$, $n \in \mathbb{N}_0$)
- Quadratzahlen: Eine natürliche Zahl wird mit sich selbst multipliziert (n^2, $n \in \mathbb{N}_0$)
- Primzahlen: Natürliche Zahlen, die genau zwei verschiedene Teiler besitzen.

Erinnerung: Didaktische Grundfragen

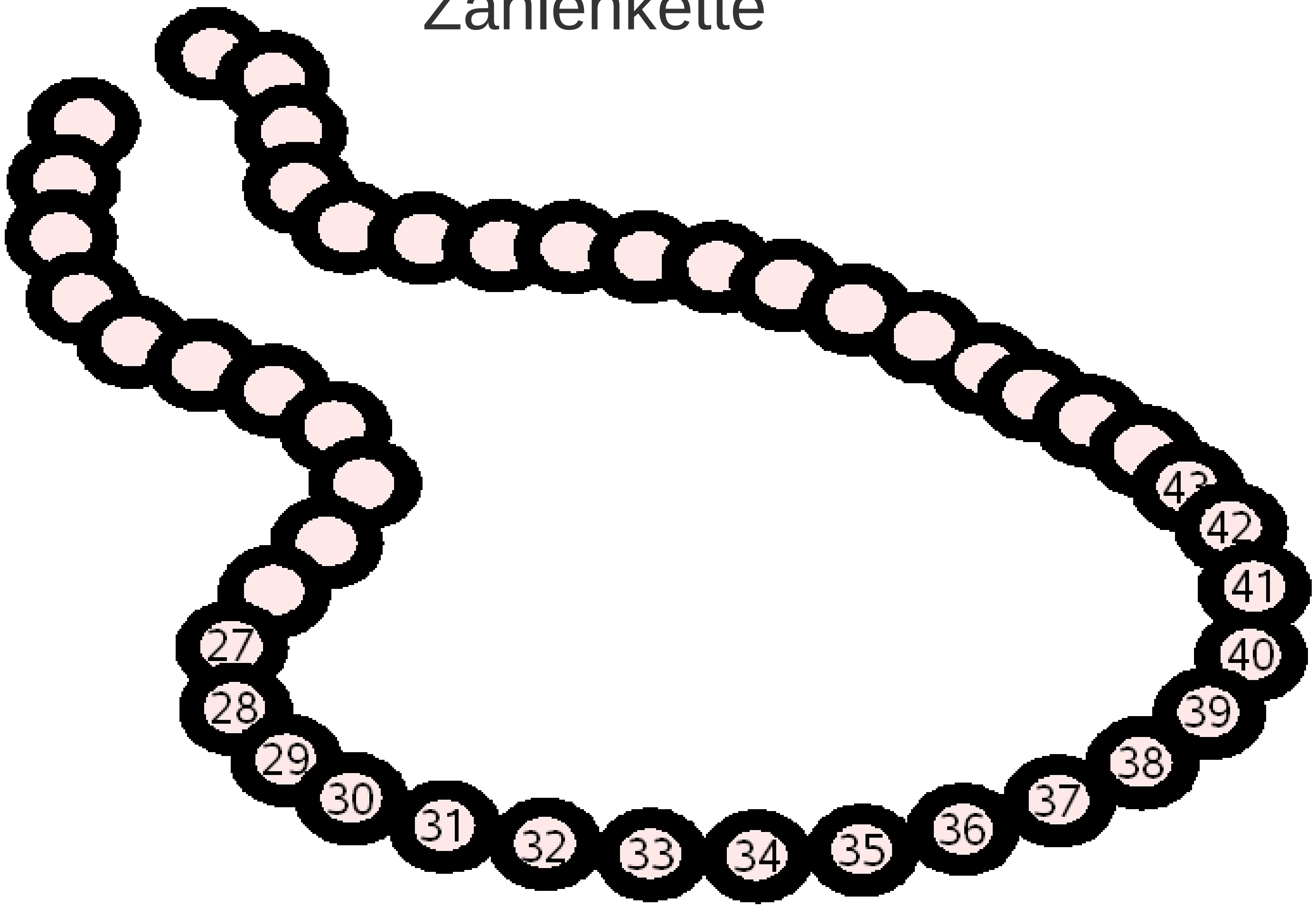
- Welche Inhalte werden behandelt?
- In welcher Reihenfolge?
- Welche mentale Modelle werden erzeugt?
- Wie werden diese unterstützt?
- Wie sind die Grenzen der Modelle / Aspekte / …?
- Wie lassen sich allgemeine mathematische Kompetenzen entwickeln?
- …

Mentale Modelle

- „Mentale Modelle sind Sinnessysteme übergreifende Gedächtnisrepräsentationen, die die gedankliche Zusammenfassung und Erprobung von Situationen oder Umwelten ermöglichen." (Hasebrook, 1995)
- Wichtig: mit mentalen Modellen kann *gearbeitet* werden
- Stellen Sie sich die Zahlen zwischen
  15 500 und 15 900
  oder zwischen 27 und 43
  vor?

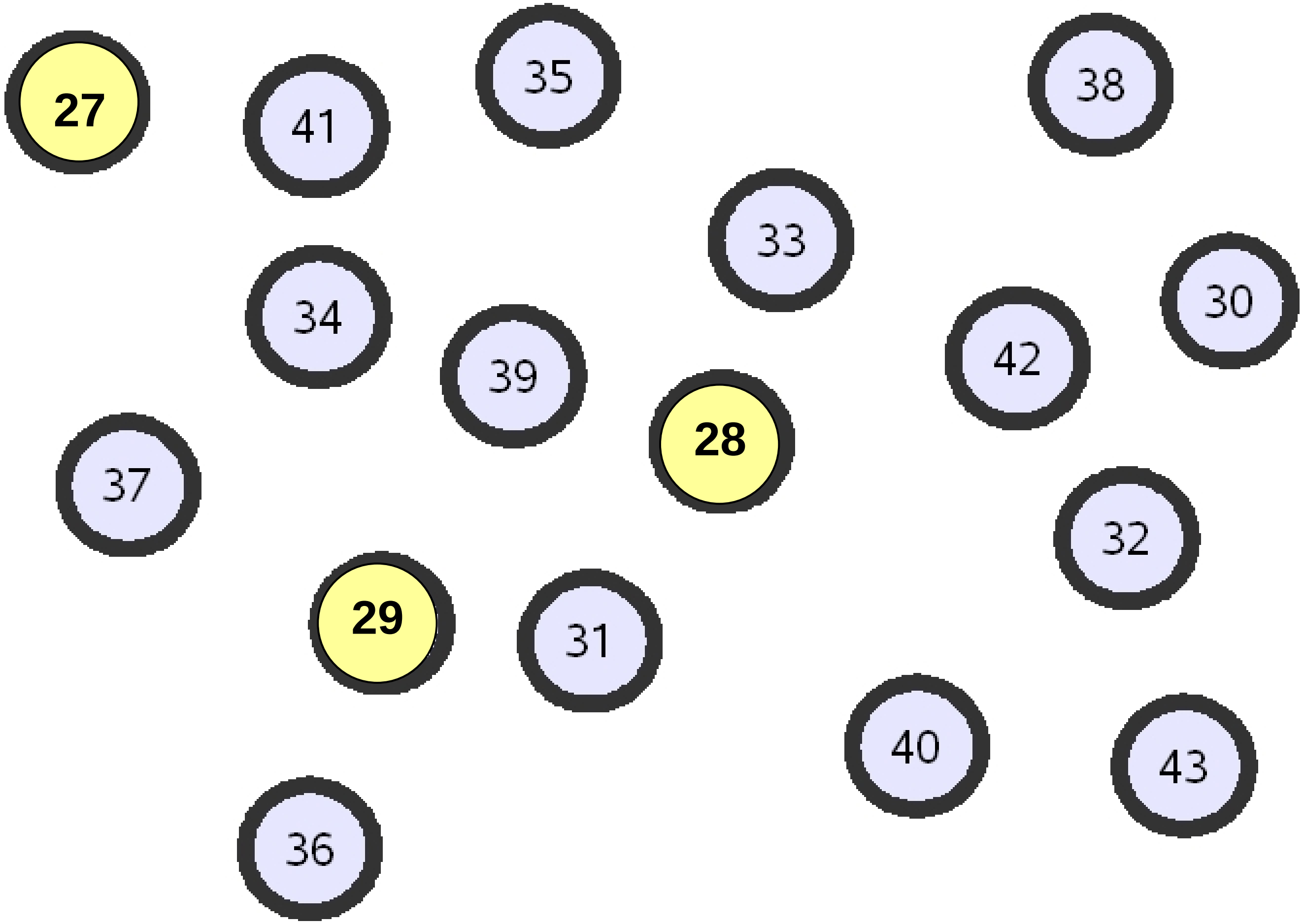
Mögliche mentale Modelle

Zahlenkette



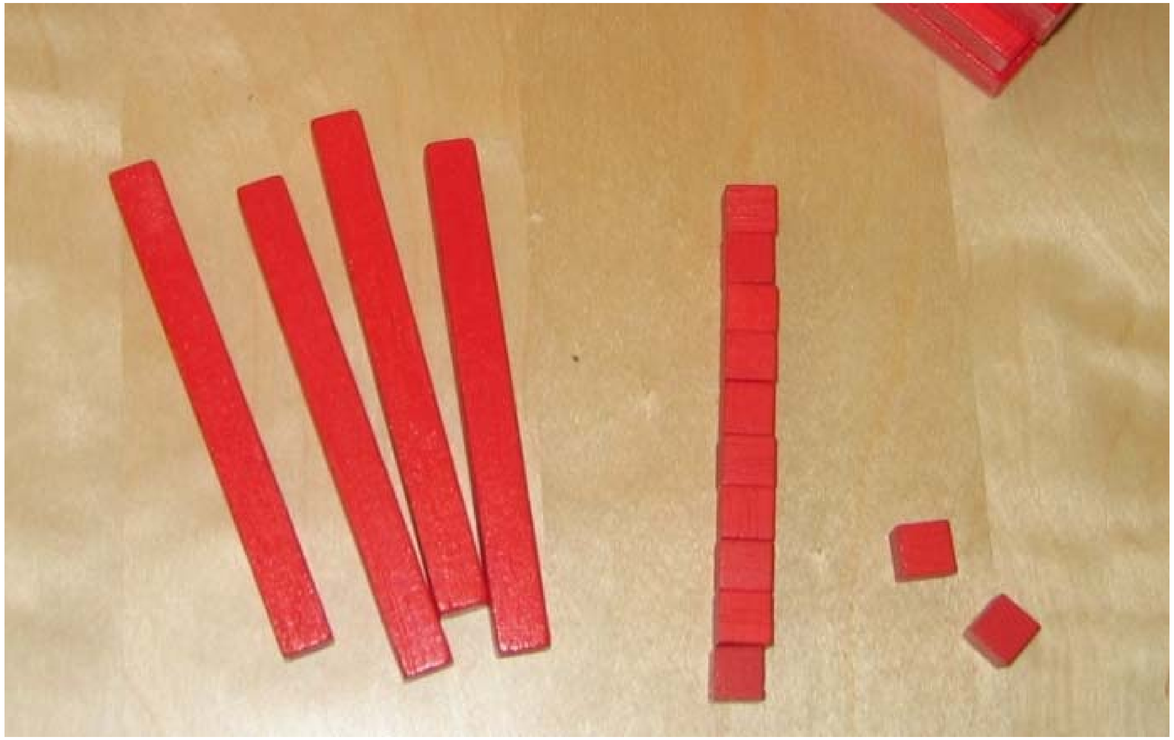
Mögliche mentale Modelle

Aufblitzende Kugeln



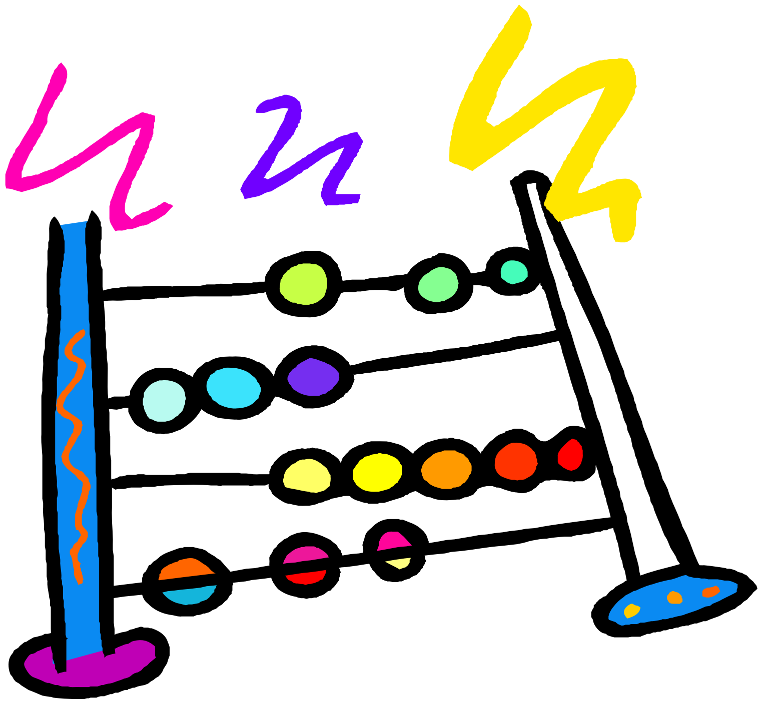
Mögliche mentale Modelle

Zehnersystemblöcke



Mögliche mentale Modelle

Abakus



Grenzen der Modelle

- Kugelmodelle
  - Sehr große Zahlen (z.B. 1 345 298)
  - Runden
  - Rechnen wird umständlich bei zunehmender Komplexität (zählendes Rechnen)
- Zehnersystemblöcke
  - Runden / Teilen / …
- Abakusmodell
  - Nicht zur Einführung geeignet (höhere Abstraktionsebene)

Unendlich viele natürliche Zahlen

- Welches Modell hilft bei der Vorstellung der unendlich großen Zahl?

- Hilberts Hotel
  - David Hilbert (1862 - 1943)
  - http://de.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

Unendlich viele natürliche Zahlen

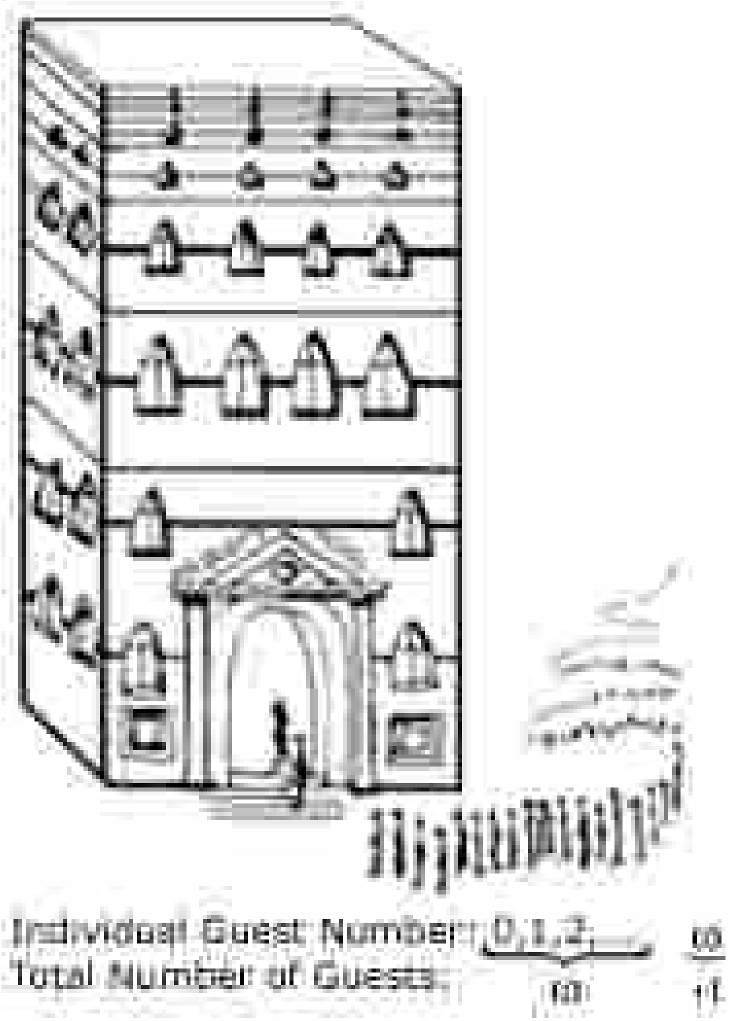
- Welches Modell hilft bei der Vorstellung der unendlich großen Zahl?

- Hilberts Hotel
  - David Hilbert (1862 - 1943)
  - http://de.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

Aufgaben

- Überlegen Sie sich eine Veranschaulichung für Hilberts Hotel!
- Wo liegen die Vorteile / Grenzen / Probleme Ihrer Veranschaulichung?
- Wie ist das bei den Veranschaulichungen Ihrer Nachbarn?

Hilberts Hotel



Reflexion des Lernerlebnisses

- Was wissen Sie jetzt, was Sie vorher noch nicht wussten?
- Wo hatten Sie Probleme beim Verstehen?
- Hätten Sie es schneller / einfacher verstehen können?
- Was hat / hätte Ihnen dabei geholfen?

Erinnerung: Didaktische Grundfragen

- Welche Inhalte werden behandelt?
- In welcher Reihenfolge?
- Welche mentale Modelle werden erzeugt?
- Wie werden diese unterstützt?
- Wie sind die Grenzen der Modelle / Aspekte / …?
- Wie lassen sich allgemeine mathematische Kompetenzen entwickeln?
- …

Curriculare Vorschriften – 1

- Grundlegende Ziele:
  - o Festigung und Systematisierung von Kenntnisse aus der Grundschule, Vereinheitlichung der Begriffe
  - o strukturelle Eigenschaften natürlicher Zahlen

Curriculare Vorschriften – 2

KMK Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Bildungsabschluss Leitidee Zahl (Auszug)

- Die Schülerinnen und Schüler
  - o nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit,
  - o nutzen zur Kontrolle Überschlagsrechnungen und andere Verfahren,
  - o runden Rechenergebnisse entsprechend dem Sachverhalt sinnvoll,
  - o führen in konkreten Situationen kombinatorische Überlegungen durch, um die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten zu bestimmen

Curriculare Vorschriften – 3

Gymnasium
(Umfang 14 Std.)

- Bestimmen und Benennen von Anzahlen
- historische Beispiele von Zahlendarstellungen, insbesondere das römische Zahlensystem
- Zahlendarstellung in Stellenwertsystemen; das Dezimalsystem, das Dualsystem
- Lesen und Schreiben großer Zahlen; die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen
- Anordnung der natürlichen Zahlen

Curriculare Vorschriften – 4

Realschule (R6) Bayern

M 5.1 Aufbau des Dezimalsystems (ca. 10 Std.)

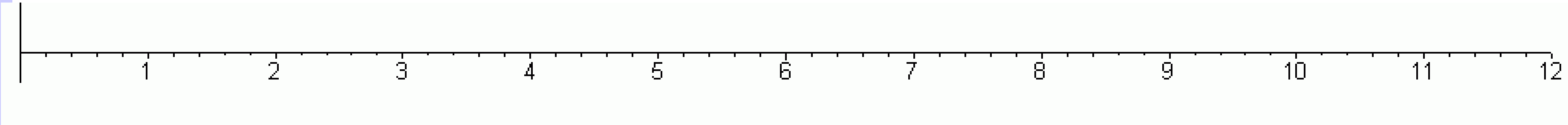
Ausgehend von den Kenntnissen aus der Grundschule vertiefen die Schüler ihre Einsichten in den Aufbau des Dezimalsystems. (Aus der Geschichte: G. W. Leibniz)

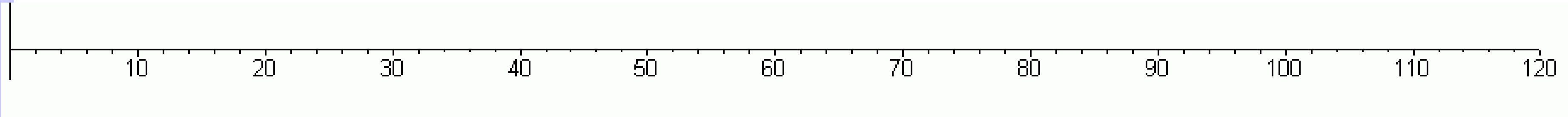
- Anordnung der natürlichen Zahlen; Zahlenhalbgerade; die Beziehungen < und >
- Aufbau des Dezimalsystems und Vergleich mit anderen Zahlensystemen (z. B. römische Zahlen, Dualzahlen); Potenzschreibweise von Stufenzahlen; „Zahlenriesen"; Runden

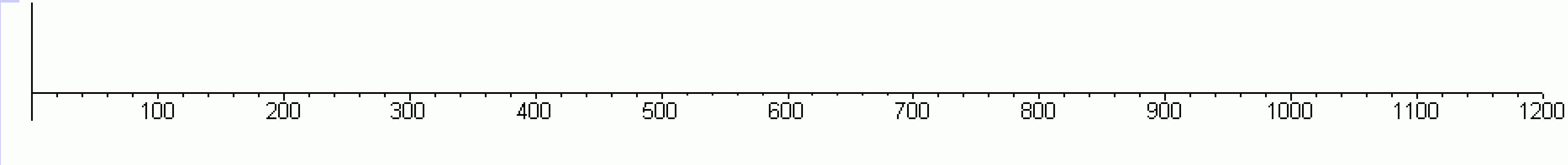
Unterrichtliche Aspekte

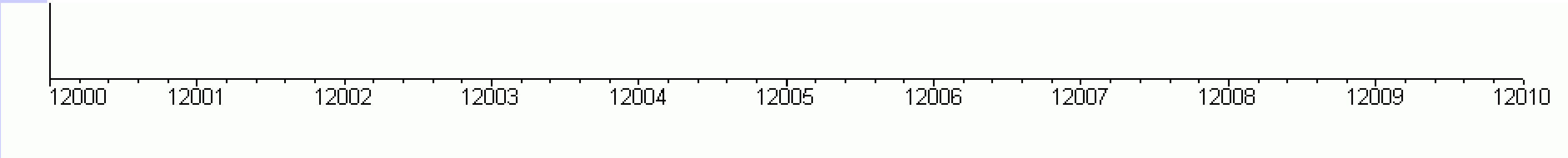
- Größer- und Kleinerbeziehung als Ausgangspunkt für
  - Anordnung auf dem Zahlenstrahl
  - Diskussion der größten Zahl (Unendlichkeit)
- Zahlenfolgen
  - Verallgemeinerung des Prinzips von Vorgängern und Nachfolger.
- Zahlenstrahl als gutes Veranschaulichungsmittel für Genauigkeit und Runden

Zahlenstrahl









Danke

für

Ihre

Aufmerksamkeit!